

TRABAJO FINAL DE GRADO

Grado en Ingeniería Mecánica

**ESTUDIO Y ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DE VIGAS DE
HORMIGÓN ARMADO MEDIANTE TÉCNICAS DE ORDEN
REDUCIDO MULTIESCALA**



Memoria y Anexos

Autor:	Joan Freixedas Morató
Director:	Eduardo Soudah Prieto
Co-Director:	Joaquín A. Hernández Ortega
Convocatoria:	Enero 2019

Resumen

Durante la evolución de la ingeniería, cuando se han querido abordar problemas estructurales complejos, ha existido la tendencia de aumentar el coste computacional, para resolverlos con precisión. En el presente proyecto, se utilizará un método innovador basado en los elementos finitos, con modelos de orden reducido, descomposición del dominio y descomposición del valor singular, que resolverá estos problemas estructurales complejos con la precisión solicitada en ingeniería y reduciendo, en gran medida, el tiempo de cálculo. La novedad que presenta, es la utilización de un proceso de inteligencia artificial, que es responsable de probar la sección de la estructura y extraer los modos característicos, que definen su comportamiento bajo ciertas condiciones. La reducción del coste computacional, que proporciona este nuevo método de orden reducido, permite que la resolución de estos problemas, se pueda llevar a cabo en una computadora de características estándares.

Este nuevo método será utilizado para verificar que las teorías utilizadas, en el cálculo analítico de vigas y columnas compuestas por varios materiales, son modelos representativos de la realidad. Por tanto, los resultados obtenidos a través de los métodos de reducción dimensional y de cálculo analítico serán muy parecidos, como se muestra en este trabajo.

Última modificación de este documento: 8 de Enero de 2019

Resum

Durant la evolució de la enginyeria, quan s'han volgut abordar problemes estructurals complexos, ha existit la tendència d'augmentar el cost computacional, per resoldre'ls amb precisió. En aquest projecte s'utilitzarà un mètode innovador basat en els elements finits, amb models d'ordre reduït, descomposició del domini i descomposició del valor singular, que resoldran aquests problemes estructurals complexos amb la precisió sol·licitada a la enginyeria i reduint, en gran mesura, el temps de càlcul. La novetat que presenta, és la utilització d'un procés d'intel·ligència artificial, que és responsable de provar la secció de la estructura y extreure els modes característics, que defineixen el seu comportament sota certes condicions. La reducció del cost computacional, que proporciona aquest nou mètode d'ordre reduït, permet que la resolució d'aquests problemes, és pugui dur a terme en un ordinador de característiques estàndards.

Aquest nou mètode serà utilitzat per verificar que las teories utilitzades, en el càlcul analític de bigues y columnes compostes per varis materials, són models representatius de la realitat. Per tant, els resultats obtinguts a través dels mètodes de reducció dimensional y de càlcul analític seran molt semblants, com es mostra en aquest treball.

Abstract

During the evolution of engineering, when they have tried to address complex structural problems, there has been a tendency to increase the computational cost, to solve them with precision. In this project we will use an innovative method based on finite elements, with models of ordered order, decomposition of the domain and decomposition of the singular value, which will solve these complex structural problems with the precision requested in engineering and reducing, to a great extent, the time of calculation. The novelty that it presents, is the use of an artificial intelligence process, which is responsible for testing the section of the structure and extracting the characteristic modes, which define their behaviour under certain conditions. The reduction of the computational cost, which provides this new method of reduced order, allows that the resolution of these problems, can be carried out in a computer with standard characteristics.

This new method will be used to verify the theories used, in the analytical calculation of beams and columns composed of various materials, are representative models of reality. Therefore, the results obtained through the methods of dimensional reduction and analytical calculation will be very similar, as shown in this work.



Agradecimientos

Es difícil incluir a todas las personas que durante estos años me han ayudado y acompañado en este camino de aprendizaje y superación personal, que ha sido el grado de Ingeniería Mecánica.

Me gustaría comenzar con el director del presente trabajo Eduardo Soudah Prieto, quien fue mi profesor de Resistencia de Materiales y me introdujo en esta apasionada disciplina con sus conocimientos y enseñanzas. Dar las gracias a Joaquín A. Hernández Ortega co-director de este trabajo, quién me ha brindado la oportunidad de colaborar en su proyecto sobre el nuevo método de reducción dimensional, permitiéndome aprender sobre esta nueva técnica. Agradecer a ambos la disponibilidad presentada y la ayuda dada durante la ejecución del trabajo.

Dar las gracias a Daniel Di Capua, profesor de la asignatura de Elementos Finitos, quién me transmitió los conocimientos para la correcta utilización del programa comercial GiD. Y a Marc Alessandro Galusi Colomar, compañero y amigo, quién me ha ayudado a realizar el renderizado de las figuras 3D mediante el programa comercial VRED.

Agradecer de forma especial a toda mi familia, especialmente a mis padres y hermana, quien me han apoyado de forma incondicional durante estos años. Me han ayudado en los momentos más difíciles, y hemos compartido los más felices, sin ellos no hubiera cumplido mi sueño de ser ingeniero mecánico.

Finalmente, agradecer a mis amigos de siempre y a los que me llevo del grado, los ánimos y ayuda dados, por hacer más amenas las horas de estudio y el buen ambiente que han creado siempre durante este camino.



Índice

RESUMEN	I
RESUM	II
ABSTRACT	III
AGRADECIMIENTOS	V
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Objetivos del trabajo.....	2
1.3. Alcance del trabajo	2
2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS	3
2.1. Fundamentos de la Teoría de Elasticidad	3
2.1.1. Concepto de tensión	3
2.1.2. Concepto de deformación.....	6
2.1.3. Ley de Hooke	10
2.2. Fundamentos de Resistencia de Materiales	11
2.2.1. Concepto de viga	11
2.2.2. Principio de rigidez	12
2.2.3. Principio de superposición	13
2.2.4. Principio de Saint – Venant	14
2.2.5. Restricciones geométricas.....	15
2.2.6. Definición de esfuerzos en una sección	16
2.2.7. Esfuerzos en piezas de plano medio	18
2.3. El Hormigón Armado.....	19
2.3.1. Historia.....	19
2.3.2. Razón de ser del hormigón armado	21
2.3.3. Particularidades del hormigón armado	22
2.4. Cálculo de secciones de varios materiales	23
2.4.1. Compresión	23
2.4.2. Flexión pura recta.....	24
2.5. Reducción dimensional y descomposición de dominios.....	26
2.5.1. Aplicación del SVD: viga de sección cuadrada	27
2.6. Generación de los perfiles	28
3. DESARROLLO DEL MÉTODO DE ORDEN REDUCIDO	33

3.1.	Perfiles generados y entrenados.....	33
3.2.	Mallado	35
3.3.	Entrenamiento básico.....	38
3.3.1.	Ensayo axial.....	40
3.3.2.	Ensayo de torsión.....	42
3.3.3.	Ensayo de flexión pura en el eje Y	44
3.3.4.	Ensayo de flexión simple en el eje Y.....	45
3.3.5.	Ensayo de flexión pura en el eje Z	46
3.3.6.	Ensayo de flexión simple en el eje Z	47
3.3.7.	Resultados del proceso del entrenamiento	48
3.4.	Modelo de orden reducido.....	49
4.	VALIDACIÓN	51
4.1.	Cálculo analítico	51
4.1.1.	Columna de hormigón armado sometida a compresión	51
4.1.2.	Viga rectangular con refuerzo de acero sometida a flexión compuesta recta	53
4.1.3.	Viga IPN200 con refuerzos de madera sometida a flexión simple.....	56
4.2.	Cálculo mediante Reducción Dimensional.....	60
4.2.1.	Herramientas de post-proceso	61
4.2.2.	Resultados obtenidos	63
5.	ANÁLISIS DE RESULTADOS	73
5.1.	Columnas de hormigón armado sometidas a compresión.....	73
5.1.1.	Perfil rectangular de 300x300 mm	73
5.1.2.	Perfil rectangular de 350x250 mm	73
5.1.3.	Perfil rectangular de 400x400mm	74
5.1.4.	Perfil circular de diámetro 300 mm	74
5.1.5.	Perfil circular de diámetro 400 mm	74
5.2.	Viga sometida a flexión compuesta recta	75
5.2.1.	Perfil rectangular con refuerzo de acero.....	75
5.3.	Viga sometida a flexión simple	75
5.3.1.	Perfil IPN200 con refuerzos de madera	75
	ANÁLISIS DEL IMPACTO MEDIOAMBIENTAL	77
	CONCLUSIONES	79
	PRESUPUESTO	81

BIBLIOGRAFÍA **83**

ANEXO A. ESTUDIOS DE CONVERGENCIA Y MALLAS **85**

A.1. Columnas de hormigón armado sometidas a compresión	85
A.1.1. Perfil rectangular de 350x250 mm	85
A.1.2. Perfil rectangular de 400x400 mm	87
A.1.3. Perfil circular de diámetro 300 mm	88
A.1.4. Perfil circular de diámetro 400 mm	90
A.2. Viga sometida a flexión compuesta recta	92
A.2.1. Perfil rectangular con refuerzo de acero	92
A.3. Viga sometida a flexión simple	93
A.3.1. Perfil IPN200 con refuerzos de madera	93

ANEXO B. ENTRENAMIENTO BÁSICO **95**

B.1. Columnas de hormigón armado sometidas a compresión	95
B.1.1. Perfil rectangular de 350x250 mm	95
B.1.2. Perfil rectangular de 400x400 mm	100
B.1.3. Perfil circular de diámetro 300 mm	104
B.1.4. Perfil circular de diámetro 400 mm	109
B.2. Viga sometida a flexión compuesta recta	114
B.2.1. Perfil rectangular con refuerzo de acero	114
B.3. Viga sometida a flexión simple	118
B.3.1. Perfil IPN200 con refuerzos de madera	118

ANEXO C. CÁLCULOS ANALÍTICOS Y DE REDUCCIÓN DIMENSIONAL **125**

C.1. Cálculo analítico	125
C.1.1. Columnas de hormigón armado sometidas a compresión.....	125
C.2. Cálculo mediante Reducción Dimensional.....	132
C.2.1. Columnas de hormigón armado sometidas a compresión.....	132



Índice de tablas

Tabla 3.1 Datos obtenidos para realizar el pertinente estudio de convergencia. _____	36
Tabla 5.1 Comparativa de resultados para el perfil rectangular de 300x300 mm. _____	73
Tabla 5.2 Comparativa de resultados para el perfil rectangular de 350x250 mm. _____	73
Tabla 5.3 Comparativa de resultados para el perfil rectangular de 400x400 mm. _____	74
Tabla 5.4 Comparativa de resultados para el perfil circular de diámetro 300 mm. _____	74
Tabla 5.5 Comparativa de resultados para el perfil circular de diámetro 400 mm. _____	74
Tabla 5.6 Comparativa de resultados para el perfil rectangular con refuerzo de acero. _____	75
Tabla 5.7 Comparativa de resultados para el perfil IPN200 con refuerzos de madera. _____	75



Índice de figuras

Figura 2.1 Concepto de tensión media (1).	3
Figura 2.2 Elemento diferencial de volumen establecido sobre el punto escogido como origen (1).	4
Figura 2.3 Tensiones aplicadas a las distintas caras del elemento diferencial estudiado (1).	5
Figura 2.4 Círculo de Mohr del estado plano de tensiones (1).	6
Figura 2.5 Deformación longitudinal (2).	7
Figura 2.6 Deformación por cortante (2).	8
Figura 2.7 Deformación angular causada sobre un cuerpo (2).	9
Figura 2.8 Curva de carga-desplazamiento (1).	11
Figura 2.9 Concepto de: a) Viga b) Rebanada c) Fibra (1).	12
Figura 2.10 Implicación del Principio de rigidez (2).	13
Figura 2.11 Principio de superposición (1).	14
Figura 2.12 Implicación del Principio Saint – Venant (2).	15
Figura 2.13 Fuerzas y momentos resultantes en cada sección (2).	17
Figura 2.14 Esfuerzos en piezas de plano medio (2).	18
Figura 2.15 Convenio de signos para esfuerzos en piezas de plano medio (2).	19
Figura 2.16 Viga de hormigón sometida a una carga distribuida q (4).	21
Figura 2.17 Viga de hormigón armado sometida a una carga distribuida q (4).	22
Figura 2.18 Sección de varios materiales (5).	23
Figura 2.19 Sección de varios materiales sometida a compresión (5).	23
Figura 2.20 Torsión elástica de una viga de sección cuadrada. La viga está bi-empotrada, con un giro que genera torsión en su extremo derecho En el pos-proceso, la viga se divide en 100 rebanadas	

y la deformación en fuerzas y desplazamientos de cada rebanada es analizada utilizando el SVD (6). _____ 27

Figura 2.21 Intensidad a lo largo de la viga de los modos SVD de fuerzas obtenidos del problema de torsión (6). _____ 28

Figura 2.22 Modos de deformación correspondientes a ensayos de flexión simple, compresión/tracción (6). _____ 28

Figura 2.23 Elaboración de una columna de hormigón armado (10). _____ 29

Figura 2.24 Sección de la columna de hormigón armado de dimensiones 300x300 milímetros. _ 30

Figura 2.25 Sección de la viga de hormigón armado con refuerzo de acero. _____ 31

Figura 2.26 Sección de la viga de acero con refuerzos de madera. _____ 31

Figura 3.1 Malla hexaédrica del perfil 300x300 mm. _____ 35

Figura 3.2 Zona donde se realiza el estudio de convergencia. _____ 36

Figura 3.3 Estudio de convergencia para la tensión axial del hormigón. _____ 37

Figura 3.4 Estudio de convergencia para la tensión axial del acero. _____ 37

Figura 3.5 Estudio de convergencia para el desplazamiento. _____ 38

Figura 3.6 Materiales del perfil rectangular 300x300 mm. El “MAT 1” es el hormigón y el “MAT 2” el acero. _____ 39

Figura 3.7 Asignación de caras perfil rectangular 300x300 mm. _____ 40

Figura 3.8 Ensayo axial, tensión σ_{xx} (Pa). _____ 41

Figura 3.9 Ensayo axial, desplazamiento en x (metros). _____ 41

Figura 3.10 Efecto Poisson: a) Sección sin deformar b) Sección deformada con un desplazamiento de 30 milímetros. _____ 42

Figura 3.11 Ensayo de torsión, desplazamiento (metros). _____ 43

Figura 3.12 Ensayo de torsión, τ_{xy} (Pa). _____ 43

Figura 3.13 Ensayo de torsión, τ_{xz} (Pa).	44
Figura 3.14 Ensayo de flexión pura y , desplazamiento en z (metros).	45
Figura 3.15 Ensayo de flexión pura y , τ_{xz} (Pa).	45
Figura 3.16 Ensayo de flexión simple y , desplazamiento en z (metros).	46
Figura 3.17 Ensayo de flexión simple y , τ_{xz} (Pa).	46
Figura 3.18 Ensayo de flexión pura z , desplazamiento en y (metros).	47
Figura 3.19 Ensayo de flexión pura z , τ_{xy} (Pa).	47
Figura 3.20 Ensayo de flexión simple z , desplazamiento en y (metros).	48
Figura 3.21 Ensayo de flexión simple z , τ_{xy} (Pa).	48
Figura 3.22 Modelo de orden reducido.	50
Figura 3.23 Visualización de sólo 25 dominios de los 100 que conforman la viga.	50
Figura 4.1 Columna de hormigón armado sometida a compresión, sección transversal y condiciones de contorno.	51
Figura 4.2 Columna de hormigón armado sometida a compresión, diagrama esfuerzo axial.	52
Figura 4.3 Viga de hormigón con refuerzo de acero sometida a flexión compuesta recta, sección transversal y condiciones de contorno.	53
Figura 4.4 Viga de hormigón con refuerzo de acero sometida a flexión compuesta recta, diagramas de esfuerzo.	55
Figura 4.5 Viga de acero IPN200 con dos refuerzos de madera sometida a flexión simple, sección transversal y condiciones de contorno.	57
Figura 4.6 Viga de acero IPN200 con dos refuerzos de madera sometida a flexión simple, diagramas de esfuerzo.	58
Figura 4.7 Mapa de colores, leyenda y deformada para la viga IPN200 con dos refuerzos de madera.	61

- Figura 4.8** Momento en el eje z de la viga rectangular con refuerzo de acero sometida a flexión compuesta. _____ 62
- Figura 4.9** 25 Secciones más solicitadas de la viga rectangular con refuerzo de acero sometida a flexión compuesta. _____ 62
- Figura 4.10** Columna de hormigón armado sometida a compresión, sección transversal y condiciones de contorno. _____ 63
- Figura 4.11** Columna de hormigón armado sometida a compresión, diagrama esfuerzo axil. ____ 64
- Figura 4.12** Columna de hormigón armado sometida a compresión, Tensión axial σ_{xx} (Pa). ____ 64
- Figura 4.13** Columna de hormigón armado sometida a compresión, deformación axial (metros). 65
- Figura 4.14** Viga de hormigón con refuerzo de acero sometida a flexión compuesta recta, sección transversal y condiciones de contorno. _____ 65
- Figura 4.15** Viga de hormigón con refuerzo de acero sometida a flexión compuesta recta, diagramas de esfuerzo. _____ 67
- Figura 4.16** Viga de hormigón con refuerzo de acero sometida a flexión compuesta recta, tensión axial σ_{xx} (Pa). _____ 67
- Figura 4.17** Ampliación de la zona de tensiones máximas de la viga de hormigón con refuerzo de acero sometida a flexión compuesta recta, Tensión axial σ_{xx} (Pa). _____ 68
- Figura 4.18** Viga de acero IPN200 con dos refuerzos de madera sometida a flexión simple, sección transversal y condiciones de contorno. _____ 68
- Figura 4.19** Viga de acero IPN200 con dos refuerzos de madera sometida a flexión simple, diagramas de esfuerzo. _____ 69
- Figura 4.20** Viga de acero IPN200 con dos refuerzos de madera sometida a flexión simple, tensión axial σ_{xx} (Pa). _____ 70
- Figura 4.21** Ampliación de la zona de tensiones máximas de la viga de acero IPN200 con dos refuerzos de madera sometida a flexión simple, tensión axial σ_{xx} (Pa). _____ 70
- Figura 4.22** Viga de acero IPN200 con dos refuerzos de madera sometida a flexión simple, deformación (metros). _____ 71

1. Introducción

El objetivo de esta sección es presentar brevemente el proyecto en su marco teórico y establecer una visión general de las técnicas utilizadas hoy en día para el cálculo de vigas y columnas compuestas de varios materiales.

1.1. Antecedentes

Hoy en día, las técnicas de cálculo mediante métodos numéricos están ampliamente extendidas en la ingeniería. A finales del siglo XX y a principios de siglo XXI, ha existido la tendencia de utilizar estos métodos para obtener resultados cada vez más precisos. Sin embargo, las unidades de procesamiento no se han desarrollado de la misma forma, presentando problemas de rapidez a la hora de resolver problemas de dimensiones considerables. En consecuencia, han aparecido nuevas técnicas que, manteniendo la misma precisión ya conseguida, intentan reducir el tiempo de cálculo, a fin de llegar a una solución más rápidamente.

En este marco de la reducción del coste computacional ciertas técnicas se vuelven muy relevantes, como la descomposición del dominio y los modelos de orden reducido. En este trabajo, el modelo de orden reducido utilizado es la denominada descomposición del valor singular, también conocida por sus siglas en inglés, SVD. La utilización conjunta de estos dos métodos permitirá, en resumen, comprimir la información en la guía del haz y solo serán procesadas con posterioridad las secciones críticas que son las determinantes en términos de diseño de la estructura. Este enfoque permite que el coste computacional se vea altamente reducido. Por otro lado, este método requiere entrenar de forma artificial el algoritmo, a través de las deformaciones impuestas a fin de almacenar ciertos modos que caracterizan el comportamiento de la sección. Los cuales permitirán obtener, a posteriori, el comportamiento de la estructura, cuando se ve sometido a ciertas condiciones de carga. Los modos deben ser antes preparados para garantizar que la solución está dentro del comportamiento esperado.

La utilidad de estos métodos enfocadas en el ámbito académico y laboral, se ve de forma clara al tratar de encontrar métodos que reduzcan el tiempo de cálculo y que propician la posibilidad de utilizar una computadora con unas características estándares, que se puede encontrar en cualquier oficina o universidad, para resolver problemas complejos.

1.2. Objetivos del trabajo

Este trabajo tiene como objetivo, verificar que las teorías actualmente utilizadas, para el cálculo analítico de columnas y vigas compuestas de varios materiales, son correctas aproximaciones de la realidad. Por tanto, en este proyecto se calcularán distintos casos de columnas de hormigón armado y vigas compuestas de distintos materiales, sometidas a determinados esfuerzos. Todos estos casos serán analizados tanto de forma analítica como utilizando el nuevo método de inteligencia artificial desarrollado por el Dr. Joaquín A. Hernández Ortega.

1.3. Alcance del trabajo

En el presente trabajo, se estudian tres tipos de problemas estructurales. El primer de ellos, ha sido el estudio de distintos perfiles de columnas de hormigón armado, sometidas a compresión. A continuación, se ha realizado el análisis de una viga de hormigón con un refuerzo de acero en su parte inferior, que ha sido sometida a flexión compuesta. Finalmente, se ha llevado a cabo el estudio de una viga de acero de perfil IPN200 con dos refuerzos de madera, sometiéndola a flexión simple. En cada uno de los casos se efectuarán los cálculos pertinentes tanto analíticos como utilizando el nuevo método de reducción dimensional, a fin de obtener los valores de las tensiones máximas y del desplazamiento máximo.

2. Fundamentos teóricos

2.1. Fundamentos de la Teoría de Elasticidad

En la Mecánica de Sólidos Deformables se encuentra integrada la Teoría de Elasticidad. Esta estudia la resistencia y la rigidez de un cuerpo sometido a un sistema de fuerzas que se encuentran en equilibrio e intenta describir el comportamiento de los sólidos deformables desde un punto de vista macroscópico. El modelo matemático que se aplica cuando se utiliza esta teoría en la resolución de problemas, afronta de forma general las geometrías, condiciones de contorno y tipos de acciones consideradas (1).

A continuación, se presentarán los conceptos de tensión y deformación y la ley de Hooke que son explicados por la teoría de Elasticidad. Estos son de gran importancia a la hora de estudiar y diseñar elementos estructurales.

2.1.1. Concepto de tensión

A fin de comprender este concepto, es necesario considerar un cuerpo sólido que está sometido a fuerzas externas que se encuentran en equilibrio entre ellas. Si a este cuerpo se le divide en dos, realizando un corte en cualquier sección, para que exista equilibrio entre las partes debe haber una fuerza aplicada en ambas superficies, estas comparten la misma magnitud y dirección, pero distinto sentido, siguiendo así la tercera Ley de Newton (1).

A continuación, se considera la superficie de una de las partes y la fuerza que la otra ejerce sobre ella, el cociente entre la fuerza y la sección tomadas es la tensión media a la que se le somete la superficie.

$$t_m = \frac{\Delta F}{\Delta S} \quad (\text{Ecu. 2.1})$$

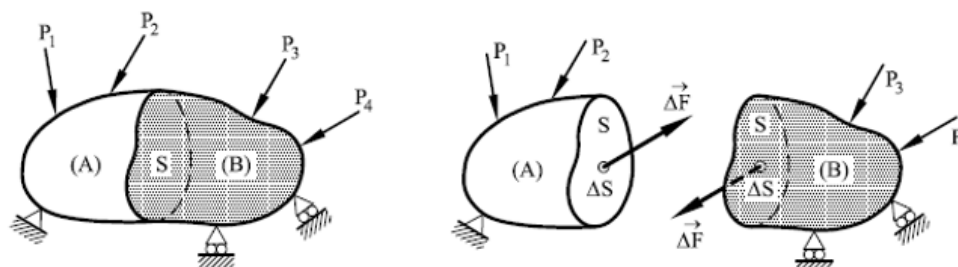


Figura 2.1 Concepto de tensión media (1).

Cuando se hace tender la superficie a un diferencial de área, se obtiene la tensión aplicada en un determinado punto de la superficie.

$$t = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS} \quad (\text{Ecu. 2.2})$$

Finalmente, como se puede observar en las ecuaciones (2.1) y (2.2) las unidades de la tensión son fuerza por unidad de superficie $[FL^2]$. Según el sistema internacional esta se mide en N/m^2 o también denominados Pascales (Pa).

2.1.1.1. Componentes de la tensión

Siguiendo el mismo procedimiento que en el apartado anterior, se considera un cuerpo sólido que está sometido a fuerzas externas en equilibrio. En este cuerpo se escoge cualquier punto de su interior (O) del cual se pretende determinar su estado tensional (1).

Para llevar a cabo la caracterización de las tensiones en O , se establece un eje de coordenadas (x, z, y) referenciado sobre este. Siguiendo los ejes se establece un elemento diferencial de volumen (dx, dy, dz) de forma cúbica, situado de tal forma que uno de sus vértices se encuentra en el origen previamente determinado.

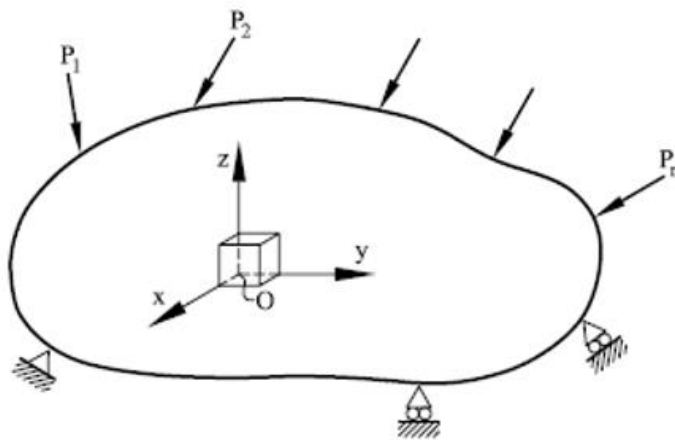


Figura 2.2 Elemento diferencial de volumen establecido sobre el punto escogido como origen (1).

Sobre cada cara del elemento diferencial actúa una tensión \tilde{t} que se puede descomponer en dos tensiones diferentes, una que es normal a la cara σ y otra que es tangencial a la cara τ . A la vez, esta tensión tangencial se puede descomponer con dos tensiones más que seguirán la dirección de los ejes paralelos a la cara en la que se encuentren aplicadas.

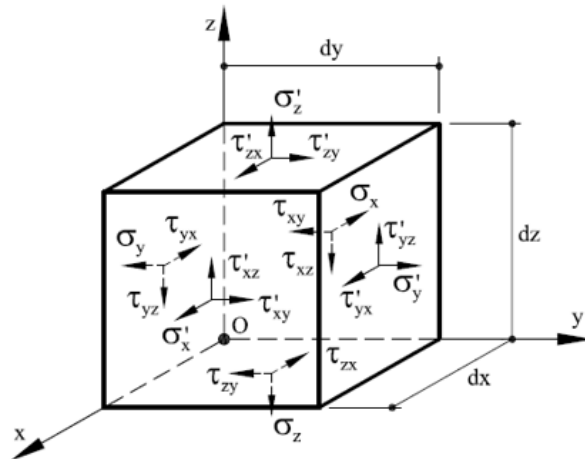


Figura 2.3 Tensiones aplicadas a las distintas caras del elemento diferencial estudiado (1).

Dependiendo de la superficie del elemento diferencial en la que se encuentran aplicadas estas tensiones se les asigna un subíndice. En el caso de las tensiones normales el subíndice viene fijado por el eje paralelo a la misma. En cambio, con las tensiones tangenciales, el primer subíndice pertenece al eje normal a la superficie y el segundo al paralelo a la componente tangencial.

2.1.1.2. Estado plano de tensiones

Considerando un cuerpo tridimensional en el cual las dimensiones en x e y son mayores que la dimensión en z , como es por ejemplo una placa plana. En estos casos las componentes tensionales que se encuentran sobre el plano normal al eje z (σ_z, τ_{zx} y τ_{zy}) son nulas. Por consecuencia, el estado tensional sobre el cuerpo se define con las tensiones σ_x, τ_{zx} y τ_{xy} que se encuentran contenidas en el plano xy (1).

Si se conocen las componentes σ_x, τ_{zx} y τ_{xy} es posible determinar las tensiones principales, utilizando la representación gráfica denominada círculo de Mohr. En el plano $\sigma - \tau$ se construye el círculo que pasa por los puntos D (σ_x, τ_{xy}) y D' ($\sigma_x - \tau_{xy}$), con centro en C ($\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y), 0$). Las tensiones principales se producen cuando la tensión tangencial es nula por consiguiente las intersecciones del círculo con el eje de las tensiones normales determinan los valores de las tensiones principales (1).

Utilizando la expresión gráfica del círculo se calculan los valores de las tensiones principales, σ_1 y σ_2 con las siguientes ecuaciones:

$$\sigma_1 = \overline{AC} + \overline{CD} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (\text{Ecu. 2.3})$$

$$\sigma_2 = \overline{AC} - \overline{CD} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (\text{Ecu. 2.4})$$

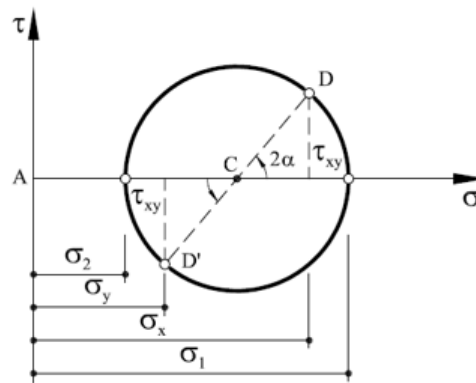


Figura 2.4 Círculo de Mohr del estado plano de tensiones (1).

En esta representación también es posible medir el ángulo 2α , que define las direcciones principales de tensión respecto a los ejes (x, y) . Finalmente, se puede calcular la tensión tangencial máxima, que es equivalente al radio del círculo, de la siguiente forma:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (\text{Ecu. 2.5})$$

2.1.2. Concepto de deformación

Consideraremos un cuerpo cualquiera que está sometido a la acción de fuerzas aplicadas, y con uniones suficientes para evitar movimientos de sólido rígido. Debido a que no existe ningún material con un valor infinito de rigidez, la situación descrita anteriormente, produce una deformación del cuerpo (2).

Las componentes que definen el desplazamiento de un punto P , u y v , en las direcciones x, y , respectivamente se expresan mediante las diferencias ente la posición final y la posición inicial.

$$u = x_f - x_i$$

$$v = y_f - y_i$$

A continuación, se procederá a analizar dos situaciones de deformación.

Primero, se analiza un cuerpo rectangular de vértices $ABCD$ que sufre un cambio de longitud en la dirección x . Este tipo de deformación se denomina deformación longitudinal.

Un punto arbitrario del cuerpo que se encuentra en la posición $P_i (x_i, y_i)$, cuando se produce la deformación este se desplaza hacia una posición final $P_f (x_f, y_f)$. Si no existe deformación en el eje y las componentes del desplazamiento son:

$$u = x_f - x_i = u(x) \quad (\text{Ecu. 2.6})$$

$$v = y_f - y_i = 0 \quad (\text{Ecu. 2.7})$$

Como se puede apreciar en las ecuaciones 2.6 y 2.7 la deformación sólo depende del desplazamiento en la coordenada x .

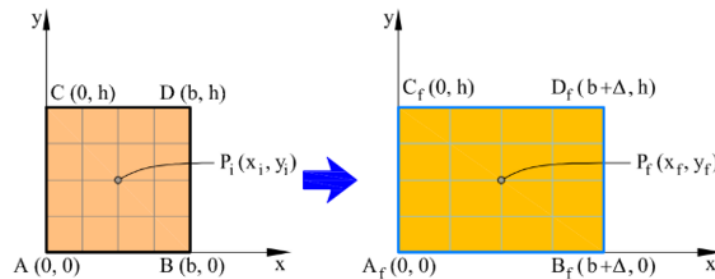


Figura 2.5 Deformación longitudinal (2).

Finalmente, como se observa en la Figura 2.5, la deformación longitudinal produce un cambio de tamaño del cuerpo, debida a la variación de la distancia longitudinal entre dos puntos.

En segundo lugar, se analiza el mismo cuerpo rectangular que el descrito anteriormente, pero este sufre una deformación en los ángulos que forman sus aristas. Este tipo de deformación se denomina deformación por cortante.

Un punto arbitrario del cuerpo que se encuentra en la posición $P_i (x_i, y_i)$, cuando se produce la deformación este se desplaza hacia una posición final $P_f (x_f, y_f)$. En la deformación por cortante, las componentes u y v que definen el desplazamiento son:

$$u = x_f - x_i = u(y) \quad (\text{Ecu. 2.6})$$

$$v = y_f - y_i = 0 \quad (\text{Ecu. 2.7})$$

En este caso, el desplazamiento u sólo depende de la coordenada y .

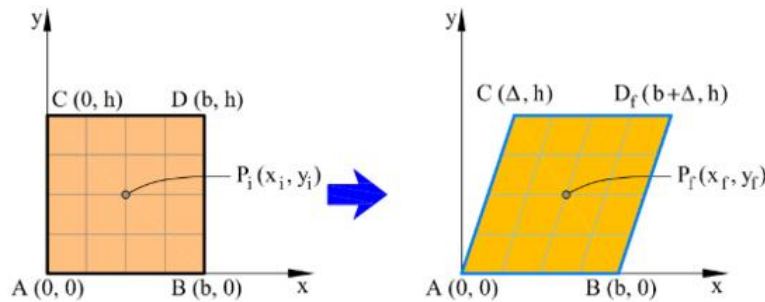


Figura 2.6 Deformación por cortante (2)

La deformación por cortante produce que el cuerpo cambie de forma, debido a la variación del ángulo que forman originalmente las aristas. Como se muestra en la Figura 2.6.

2.1.2.1. Tipo de deformaciones

Según la explicación realizada anteriormente, hay dos tipos de deformaciones. Una que varía el tamaño inicial del cuerpo, denominada deformación longitudinal y la que cambia la forma del cuerpo, denominada deformación por cortante o también deformación angular. A continuación, se realizará una explicación más detallada de ambas (2).

Deformación longitudinal

Se estudia una barra recta que tiene una longitud l y que debido a unas fuerzas aplicadas, se produce un alargamiento Δl adquiriendo así una longitud final de $l_f = l_i + \Delta l$.

$$\Delta l = l_f - l_i \quad (\text{Ecu. 2.8})$$

Teniendo en cuenta la consideración hecha anteriormente, se puede definir el concepto de deformación longitudinal media o alargamiento unitario medio que se calcula con el cociente del alargamiento entre la longitud inicial. Obteniendo así un valor adimensional que relaciona la longitud inicial de la barra con el alargamiento sufrido por la misma.

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta l}{l} \quad (\text{Ecu. 2.9})$$

Las deformaciones longitudinales se toman positivas las que definen un alargamiento y negativas las que definen un acortamiento. La relación que existe entre la deformación longitudinal y el desplazamiento, se basa en la hipótesis de que los desplazamientos u son pequeños $u \ll l$ y que la deformación también es pequeña $\varepsilon \ll 1$ (2).

Deformación angular

Cuando se produce un cambio de forma de un cuerpo este viene definido por la variación de los ángulos que forman las aristas del cuerpo que originalmente son rectos.

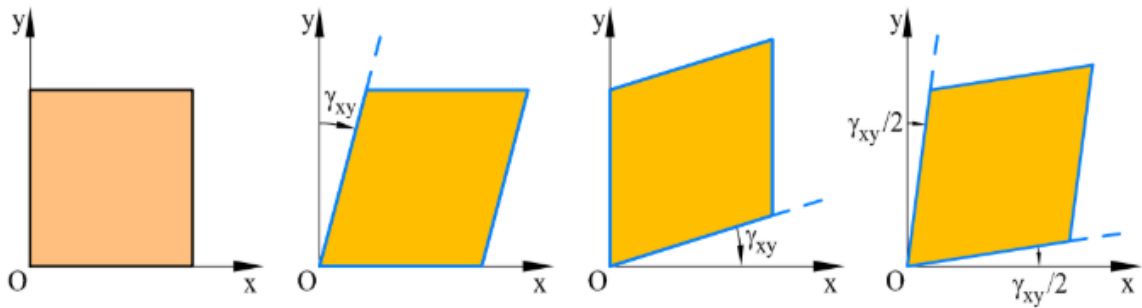


Figura 2.7 Deformación angular causada sobre un cuerpo (2).

Como se muestra en la Figura 2.7 la diferencia entre los bloques es la rotación del sólido rígido, produciendo un cierto ángulo entre las dos aristas γ_{xy} , que anteriormente era recto.

La deformación angular en un punto se define como la variación angular entre dos segmentos que inicialmente son perpendiculares entre sí.

Si se consideran los segmentos \overline{PQ} y \overline{PR} del sólido de la Figura 2.7, la deformación angular del punto P , se expresa de la siguiente forma:

$$\gamma_{xy}(P) = \lim_{\substack{Q \rightarrow P \\ R \rightarrow P}} (\widehat{QPR} - \widehat{Q'P'R'}) = \lim_{\substack{Q \rightarrow P \\ R \rightarrow P}} \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{Q'P'R'} \right) \quad (\text{Ecu. 2.10})$$

La deformación angular se considera positiva cuando los ángulos que forman los segmentos anteriormente perpendiculares disminuye. Esta es adimensional, ya que a variación angular que define se mide en radianes. Lo descrito anteriormente se basa en la hipótesis de que la deformación angular $\gamma \ll 1$ (2).

2.1.2.2. Estado plano de deformaciones.

El estado plano de deformaciones se produce cuando los movimientos según los ejes x, y, z son:

$$u = u(x, y) \quad v = v(x, y) \quad w = 0$$

Considerando los movimientos anteriores, se obtiene que en un estado plano donde los desplazamientos $u(x, y)$ y $v(x, y)$ se producen en los ejes x, y respectivamente, existen tres deformaciones, dos longitudinales y una angular, estas son las siguientes:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{Ecu. 2.11})$$

2.1.3. Ley de Hooke

Se supone un cuerpo sólido que está sometido a un conjunto de fuerzas aplicadas. Debido a estas fuerzas el cuerpo se deforma y cuando son retiradas, este tiende a recuperar su forma inicial. Este comportamiento es denominado elasticidad.

El comportamiento real de un cuerpo no es ni totalmente elástico ni totalmente plástico, sino una combinación de ambos. Por tanto, cuando se aplica una fuerza sobre un cuerpo sólido se produce la combinación de los dos tipos de deformaciones y cuando esta es retirada tenemos la recuperación de la parte elástica pero también la remanencia de la deformación plástica en el cuerpo (1).

Si ahora consideramos una viga biapoyada, en la cual se le aplica una fuerza que irá incrementando su valor de forma gradual y se medirá de forma simultánea el desplazamiento vertical en un punto. Si se dibuja el comportamiento del desplazamiento y de la tensión a medida que se aplica la fuerza hasta un cierto valor y cuando se retira esta fuerza. Veremos que se dibuja una curva en la cual se podrán detectar tres zonas diferentes. La primera de ellas es la zona elástica donde, la carga y descarga dibujan la misma línea y por tanto la viga sufre deformación elástica, esto será así hasta que lleguemos a un cierto valor límite que es específico de cada material, llamado límite elástico P_e . La segunda zona se produce, si la carga excede el límite elástico, entonces el dibujo de la carga se separa del de la descarga, en este momento se está experimentando deformación plástica. También puede observar otro denominado límite de proporcionalidad P_p que a partir de él la tensión aplicada y la deformación sufrida no son proporcionales entre sí. Finalmente, la tercera zona se encuentra entre el límite de proporcionalidad y el elástico denominada de transición elástica-plástica donde se producen los dos tipos de deformación (1).

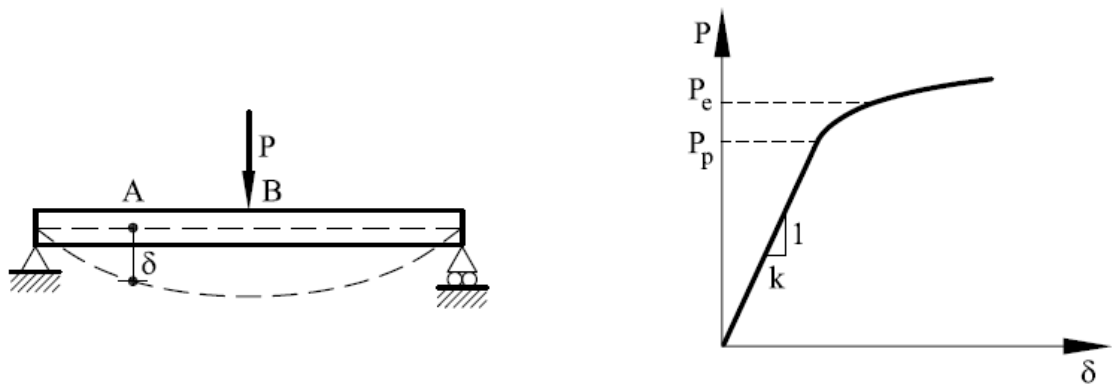


Figura 2.8 Curva de carga-desplazamiento (1).

La ecuación matemática que define la Ley de Hooke es la siguiente:

$$\delta = k P \quad (\text{Ecu. 2.12})$$

Dónde k es la constante de proporcionalidad entre la fuerza aplicada P y el desplazamiento δ que se produce. Esta constante depende de las solicitaciones del problema y de las propiedades mecánicas de la viga.

2.2. Fundamentos de Resistencia de Materiales

La resistencia de materiales constituye una rama de la Mecánica de Sólidos Deformables que tiene como objetivo principal proporcionar los métodos necesarios para poder abordar el estudio de la resistencia y la rigidez de cuerpos sólidos deformables con una forma definida y que se encuentran sometidos a la acción de sistemas de fuerzas en equilibrio, a lo largo de su vida útil (1).

A continuación, se expondrán los tres principios o hipótesis fundamentales de la Resistencia de Materiales; el principio de rigidez, el Principio de Superposición y el Principio de Saint-Venant.

2.2.1. Concepto de viga

Se denomina pieza prismática, viga o barra al cuerpo sólido generado por el barrido de un área plana dónde su centro de gravedad circula a través de una línea dada y se mantiene normal a esta en todo su recorrido. Esta línea se llama directriz, línea media o eje de la pieza y las infinitas posiciones que ocupa la superficie a lo largo del recorrido se denominan secciones rectas o secciones normales de la pieza (1).

También es necesario definir el concepto de rebanada y fibra que a la vez están sujetos al concepto de viga. La rebanada es el elemento diferencial que se genera entre dos secciones que se encuentran

infinitamente próximas. Por consiguiente, se puede considerar a la viga como una sucesión de infinitas rebanadas. La fibra es un elemento diferencial de volumen que se genera a través del barrido de un área diferencial que forma parte de la superficie que genera la viga. En consecuencia, se puede entender la viga como un sólido formado por un haz de infinitas fibras diferenciales. Estos elementos son el objeto de aplicación de la teoría de Resistencia de Materiales.

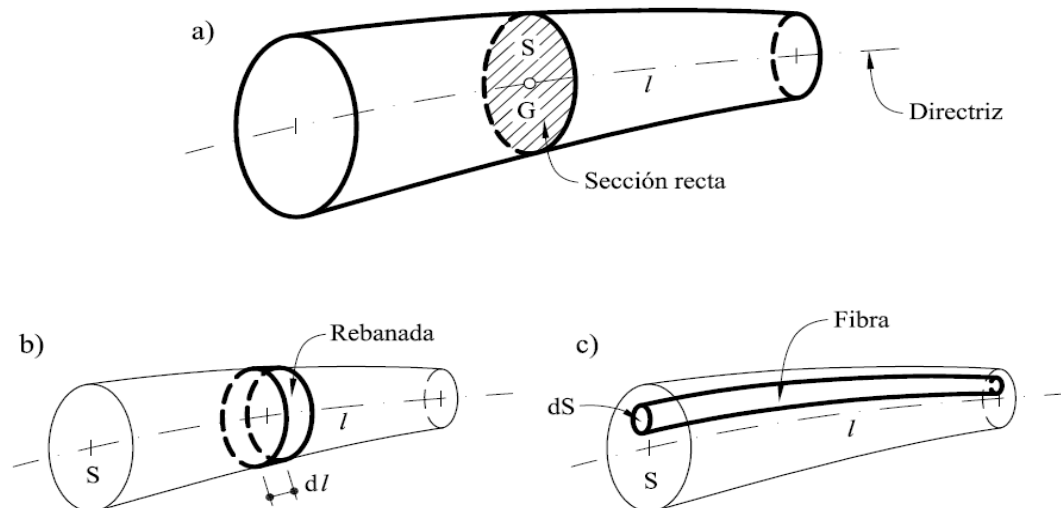


Figura 2.9 Concepto de: a) Viga b) Rebanada c) Fibra (1).

Los conceptos de rebanada y fibra, son aplicables en piezas que están formadas por distintos materiales. En el caso, del concepto de pieza prismática, viga o barra solo se podrá aplicar, siempre y cuando las interfaces entre los distintos materiales sean superficies paralelas a la directriz de la pieza. Un ejemplo claro, al que se le pueden aplicar los tres; es una viga de hormigón armado, donde las barras de acero forman el armado longitudinal y estas son paralelas a la directriz de la viga.

2.2.2. Principio de rigidez

Si se aplica la hipótesis de pequeños movimientos sobre una estructura y se establece que: *“las ecuaciones de equilibrio se pueden formular sobre la geometría no deformada, es decir, sin considerar los movimientos provocados por el sistema de cargas”* en consecuencia se establece el principio de rigidez (2).

Cuando se aplica esta hipótesis se asume que los movimientos que provocan el sistema de cargas aplicadas son pequeños respecto a las dimensiones de la estructura y que los giros (en radianes) serán menores que la unidad. En caso de que esta condición no se cumpla, las ecuaciones de equilibrio deben formularse sobre la geometría deformada y se deja de tener un problema lineal para transformarse en uno geoméricamente no lineal.

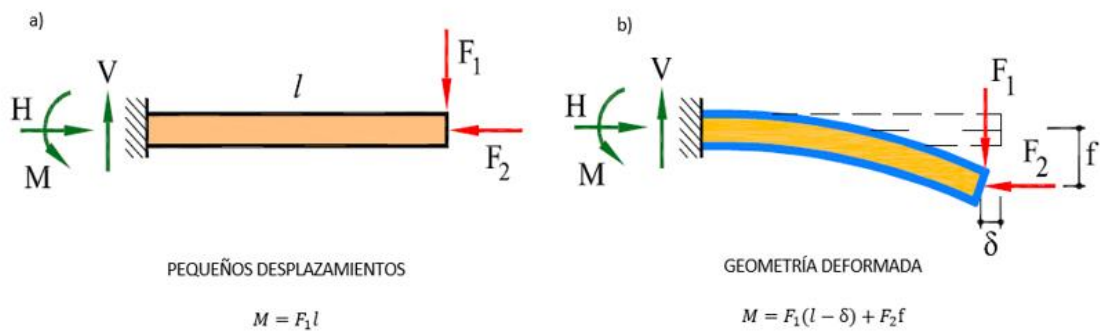


Figura 2.10 Implicación del Principio de rigidez (2).

En la Figura 2.10 a) se ilustra cómo se realiza el estudio de las reacciones de una viga que está sometida a un sistema de fuerzas aplicadas utilizando el Principio de rigidez, en este caso las reacciones en el empotramiento solo dependen de la geometría inicial y las cargas. En cambio, en la Figura 2.10 b) se muestra como se debería estudiar una viga si no se aplica el Principio de rigidez, se tendría un sistema en el cual las reacciones del empotramiento dependerían de la deformación de la estructura, que a priori es desconocida.

2.2.3. Principio de superposición

Como se indica en el punto anterior, si es válida la hipótesis de pequeños desplazamientos y además se cumple la ley de Hooke, entonces el problema es lineal. En este caso, se puede aplicar el Principio de superposición. Este establece que *“los efectos que un sistema de fuerzas origina sobre una estructura son iguales a la suma de los efectos que originan cada una de las fuerzas del sistema actuando por separado”* (1).

Una de las consecuencias directas que implica este principio es que el estado final de tensiones y deformaciones de una estructura sometida a un sistema de fuerzas, no depende del orden de aplicación de dichas fuerzas. Esto permite, por ejemplo, analizar el caso de una sollicitación compleja, descomponiéndola en casos más simples de estudiar. También es posible definir y analizar un estado de carga que es de interés como la combinación de estados de carga previamente definidos y analizados, los cuales pueden estar tabulados. Las dos posibilidades son utilizadas frecuentemente en Resistencia de Materiales.

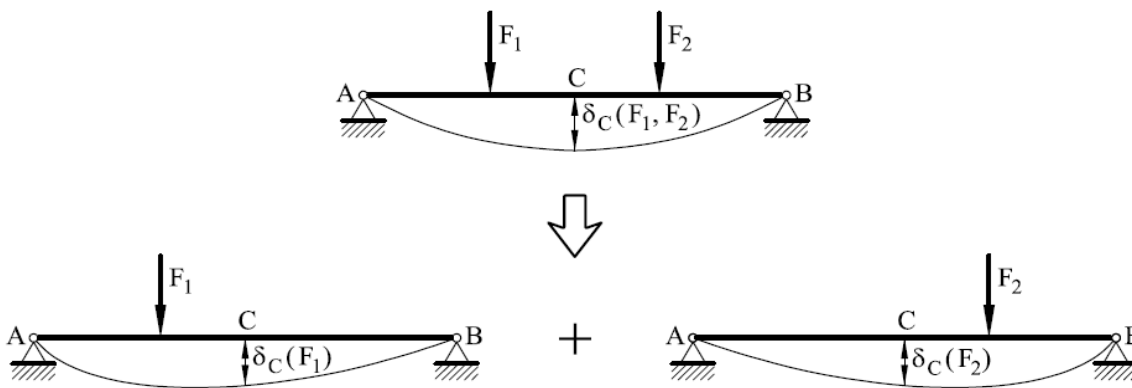


Figura 2.11 Principio de superposición (1).

En la Figura 2.11 se observa una viga biapoyada sobre la que actúan dos fuerzas puntuales; este sistema se puede descomponer en dos sistemas más simples, tal y como se muestra en la parte inferior de la imagen. El principio de superposición implica que las reacciones, movimientos, tensiones y deformaciones que el estado de cargas original genera sobre la estructura, es igual a la suma de las reacciones, movimientos, tensiones y deformaciones que provocan los estados en los que éste se descompone.

2.2.4. Principio de Saint – Venant

El principio de Sint – Venant se puede considerar como el más relevante de los tres y sobre el cual se sustenta la Resistencia de Materiales. Este establece que *“en una pieza prismática, las tensiones que actúan sobre una sección recta, alejada de los puntos de aplicación de un sistema de cargas, sólo dependen de la fuerza y del momento resultantes de las fuerzas situadas a un lado de la sección considerada”* (2).

Esta hipótesis implica que los efectos locales (fuerzas concentradas, apoyos, variaciones de sección) sólo afectan a una zona localizada a uno y otro lado de las secciones en que se producen. Por tanto, la forma precisa de aplicación de las cargas, así como la disposición constructiva de los sistemas de apoyo, solo afectan al estado tensional de esta zona localizada, que tiene una longitud aproximada al canto de la pieza.

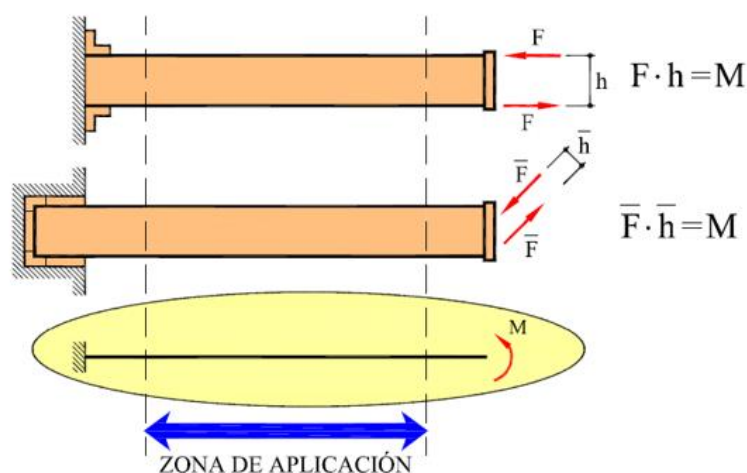


Figura 2.12 Implicación del Principio Saint – Venant (2).

En la Figura 2.12 se muestran dos ejemplos distintos de voladizos con momento aplicado en sus extremos libres. En el primer caso, el empotramiento de la viga se realiza contra el soporte e impidiendo el giro mediante sendos angulares soldados; el momento en el extremo se consigue aplicando un par de fuerzas en este. En el segundo, el empotramiento se consigue encastando la viga en el soporte; el momento en el extremo resulta de un par de fuerzas inclinadas respecto al eje de la viga. En ambas situaciones, la resultante de fuerzas es cero y el momento producido por el sistema de fuerzas es idéntico.

Aún que las condiciones de empotramiento y los momentos aplicados en cada una de las vigas son distintos entre sí, tienen la misma idealización a efectos de cálculo, como muestra la Figura 2.12. Según el Principio de Saint – Venant, las tensiones en las zonas centrales de la pieza solo dependen del momento resultante de las fuerzas que actúan sobre un extremo de la viga. Por lo contrario, las zonas extremas se ven afectadas por los efectos locales, y la determinación de su estado tensional requerirá de consideraciones más cuidadosas.

En ingeniería, el estudio del estado tensional de un elemento estructural suele hacerse suponiendo que el principio de Saint – Venant es aplicable en todas las secciones de la viga. Al final del estudio, se adoptan las consideraciones constructivas necesarias para reducir o soportar las sollicitaciones locales en las zonas en que los resultados en esta forma no son aplicables.

2.2.5. Restricciones geométricas

Se deben cumplir ciertas condiciones para que los principios que se han presentado con anterioridad se cumplan y los resultados obtenidos de aplicar la Resistencia de Materiales sean válidos (1).

- **Geometría de la directriz.** Cuando se tienen piezas de directriz curva, los radios de curvatura deben ser grandes respecto al canto de las piezas. En el caso, en que esta relación sea suficientemente grande, los efectos de la curvatura pueden llegar a obviarse en el análisis del comportamiento de las infinitas rebanadas y utilizar las expresiones obtenidas para piezas de directriz recta.
- **Geometría de las secciones:**
 - Dimensiones.** Las dimensiones transversales de la pieza, es decir, el canto y el ancho deben ser pequeños en relación a la longitud. Esto es necesario para que se cumplan el principio de Saint – Venant. Por otra parte, las características geométricas de las secciones rectas deben asegurar que las piezas tengan la rigidez necesaria para que los desplazamientos sean pequeños. En general, son admisibles las siguientes relaciones *canto/luz* (h/l):

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{10} \text{ a } \frac{1}{12} \quad \text{Para piezas rectas de hormigón armado.}$$

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{15} \text{ a } \frac{1}{25} \quad \text{Para piezas rectas de hormigón pretensado.}$$

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{20} \text{ a } \frac{1}{35} \quad \text{Para piezas rectas de acero laminado.}$$

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{40} \text{ a } \frac{1}{100} \quad \text{Para arcos.}$$

-**Variación:** En piezas de sección variable, la variación de las dimensiones transversales debe ser gradual y lenta. Las variaciones bruscas en las características geométricas de las secciones producen efectos locales que invalidan el principio de Saint – Venant.

2.2.6. Definición de esfuerzos en una sección

Se considera una viga que se encuentra sometida a la acción de un sistema de cargas externas, se supone que por una sección recta cualquiera, S , se divide en dos partes, (A) y (B) , tal y como se muestra en la Figura 2.13 (2).

El sistema de fuerzas que actúan sobre la viga debe estar en equilibrio estático. Si se denomina F_A el sistema de fuerzas que actúa sobre la parte (A) de la pieza y F_B al sistema de fuerzas que actúa sobre la parte (B) , por equilibrio se presenta la siguiente ecuación:

$$F_A + F_B = 0 \quad \text{(Ecu. 2.13)}$$

Del mismo modo, tomando momentos respecto al centro de gravedad G de la sección S , debe cumplirse:

$$M_{F_A}^G + M_{F_B}^G = 0 \quad \text{(Ecu. 2.14)}$$

Ahora se considera el equilibrio de las dos partes de la pieza por separado. Para que exista equilibrio, es necesario suponer que existen unas fuerzas de interacción que ambas partes ejercen entre sí, a través de la superficie S .

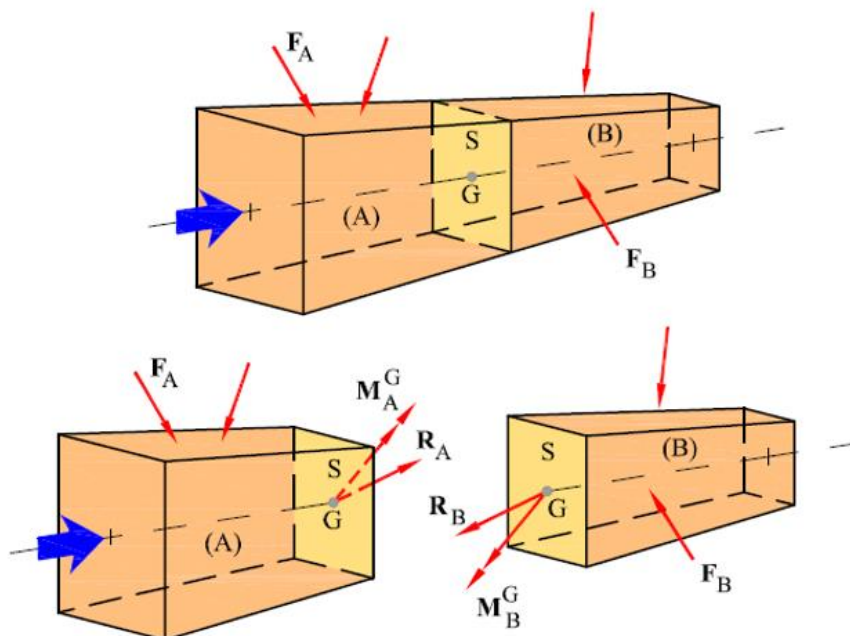


Figura 2.13 Fuerzas y momentos resultantes en cada sección (2)

En consecuencia, la parte (B) ejercerá sobre la parte (A) unas fuerzas que se pueden reducir a una resultante R_A y un momento resultante, respecto al centro de gravedad, M_A^G . De igual forma, la parte (A) ejerce sobre la parte (B) una fuerza resultante R_B y un momento resultante M_B^G .

Por tanto, el equilibrio de la parte (A) debe ser:

$$F_A + R_A = 0 \quad (\text{Ecu. 2.15})$$

$$M_{F_A}^G + M_A^G = 0 \quad (\text{Ecu. 2.16})$$

Y el de la parte (B) debe ser:

$$F_B + R_B = 0 \quad (\text{Ecu. 2.17})$$

$$M_{F_B}^G + M_B^G = 0 \quad (\text{Ecu. 2.18})$$

Si se suman las Ecuaciones 2.15 y 2.16, y teniendo en cuenta el equilibrio global, Ecuaciones 2.13 y 2.14, se obtiene:

$$(F_A + F_B) + R_A + R_B = 0 \rightarrow R_A = -R_B \quad (\text{Ecu. 2.17})$$

$$(M_{F_A}^G + M_{F_B}^G) + M_A^G + M_B^G = 0 \rightarrow M_A^G = -M_B^G \quad (\text{Ecu. 2.18})$$

Finalmente se puede concluir, que las acciones que una parte ejerce sobre la otra son iguales, pero de sentido contrario.

2.2.7. Esfuerzos en piezas de plano medio

Se considera una pieza de plano medio como la mostrada en la Figura 2.14. El plano medio que contiene la directriz y las cargas que actúan sobre la pieza, le llamaremos plano XY . Este es plano de simetría de las secciones rectas.

La referencia xyz local de una sección genérica se define de la siguiente forma. El eje x es tangente a la directriz de la pieza y se sitúa en el centro de gravedad G , de la sección y orientado según el sentido positivo de recorrido de la directriz. Respecto al eje y , este se encuentra en el plano medio que, por simetría, es plano principal de inercia y es perpendicular al eje x , es decir, generando un ángulo de $\pi/2$ en sentido antihorario. El eje z es normal a los ejes (x, y) y de sentido tal que el triedro (x, y, z) es dextrógiro. En consecuencia, el plano XY coincide en el plano xy , y el eje z es perpendicular a éste (2).

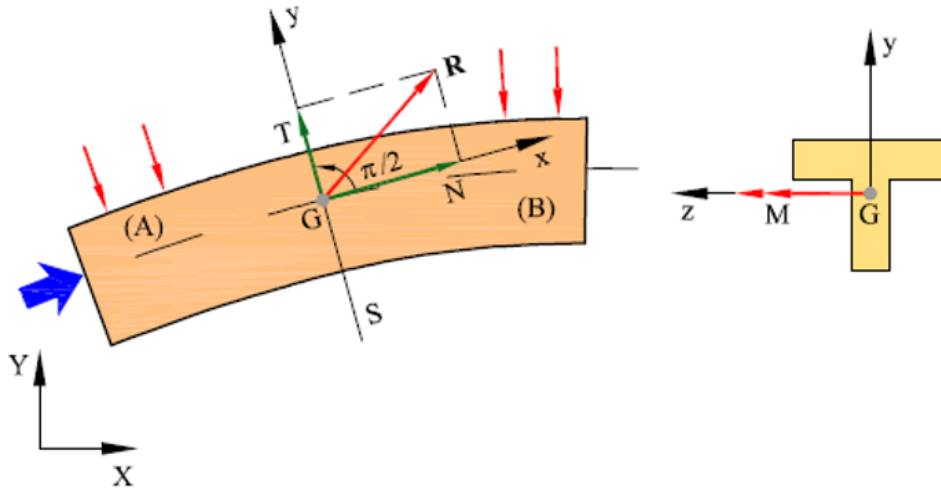


Figura 2.14 Esfuerzos en piezas de plano medio (2).

Las fuerzas exteriores que actúan sobre la viga están contenidas en el plano XY . Por tanto, la resultante R de estas fuerzas también estará contenida en este plano, y se descompone en un esfuerzo axial N (según el eje x) y un esfuerzo cortante T (según el eje y). Por simetría respecto al plano medio, T_z es nulo. De la misma forma, el momento resultante M es perpendicular al plano XY y se llama momento

flector M a su única componente según el eje z . Las otras dos componentes M_t y M_y son nulas por simetría respecto al plano medio.

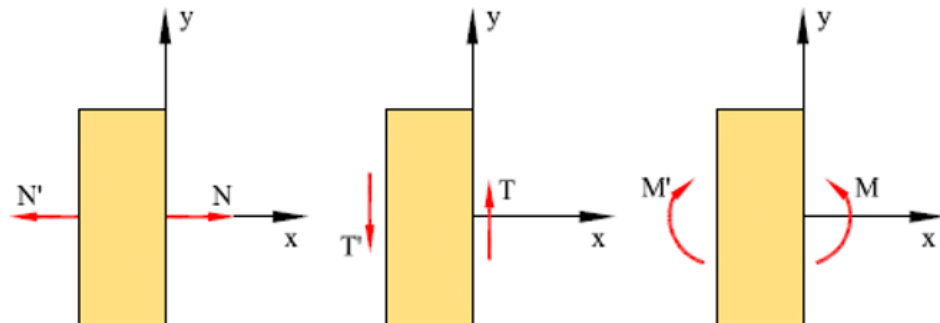


Figura 2.15 Convenio de signos para esfuerzos en piezas de plano medio (2).

En piezas de plano medio se adoptará el convenio de signos que se muestra en la Figura 2.15:

- El esfuerzo axial N es positivo si es de tracción (según el sentido positivo del eje x en la cara frontal) y negativo si es de compresión.
- El esfuerzo cortante T es positivo si hace girar la rebanada en sentido antihorario (según el sentido positivo del eje y en la cara frontal), y negativo en el caso contrario.
- El momento flector M es positivo si es antihorario sobre la cara frontal (según el sentido positivo del eje z en cara frontal), y negativo en caso contrario.

2.3. El Hormigón Armado

2.3.1. Historia

El hormigón es el producto que se obtiene al mezclar cemento, agua, arena y fragmentos de roca machacados. Cuando la mezcla está fresca tiene la capacidad de ser moldeable, hasta que se produce la reacción de hidratación que la endurece y le otorga una resistencia a la compresión. El principal problema del hormigón es su deficiente resistencia a la tracción, que incluso es inferior a la de la piedra natural.

La primera aplicación del acero para reforzar el hormigón y por tanto mejorar su resistencia a la tracción. La realizó el francés François Coignet (1814 - 1888) quién en 1853 llevó a cabo la construcción de un inmueble de cuatro plantas en el número 72 de la calle Charles Michels de París. El cual, su estructura y sus ornamentos estaban realizados con hormigón, además la azotea estaba realizada con hormigón reforzado con perfiles metálicos. Esto fue un mero echo propagandístico, pero demostró las grandes cualidades estructurales que tiene el hormigón tanto armado como sin armar. Un año después consiguió la patente del hormigón reforzado con barras metálicas (3).

En 1854 el británico William Boutland Wilkinson (1819 – 1902) había patentado un sistema de forjados reticulares con encofrados de hormigón. La propaganda que hizo para dar a conocer su patente demostraba que se había dado cuenta de las grandes cualidades que tenía el hormigón, ya que lo presentaba como un material dotado de una gran resistencia al fuego y como “protector” del acero introducido en su interior. Siempre ha sido una gran preocupación la propagación del fuego en las viviendas, actualmente disponemos de sistemas muy eficaces de protección contra incendios. Pero en el Siglo XIX y anteriores, el principal elemento de construcción era la madera y como se sabe esta es muy combustible. Un incendio que se originaba en una vivienda podía propagarse hasta afectar decenas de estas, provocando daños personales y materiales. Por tanto, era de gran importancia esta propiedad del hormigón para proporcionar mayor seguridad a las personas, en caso de incendio(3).

Este nuevo material se utilizó en distintas disciplinas diferentes a la edificación. Por ejemplo, Joseph Louis Lambot (1814 – 1887) presentó en la Exposición de París de 1855 un bote totalmente apto para la navegación.

El francés Joseph Monier (1823 – 1906) lo utilizó, en un principio, para fabricar jardineras. Posteriormente, realizó cuatro patentes que utilizaba el hormigón armado para la construcción de tubos y tanques hidráulicos, paneles prefabricados para fachadas, pasarelas para peatones y vehículos y vigas.

Sin embargo, detrás de estos impresionantes logros no había ninguna base teórica, sino que todos los diseños se basaban en ensayos de prototipos.

Los tratados que permitieran abordar el cálculo y dimensionamiento parecían imposibles de realizar, debido a dos razones: la escasa base teórica sobre el comportamiento del material y el bloqueo de información que suponían las patentes. Fue el alemán Emil Mörsch (1872-1950) quién sentó las bases del Método Elástico para el cálculo de elementos de hormigón armado.

A nivel europeo, en 1964 se fundó el *Comité Europeo del Hormigón (Comité Européen du Béton, CEB)*, esta entidad publicó el mismo año que su fundación una serie de recomendaciones sobre la utilización del hormigón estructural. Estas fueron revisadas en 1970 y en 1977, año en que el CEB y la FIB (*Federación Internacional del Pretensado*) aprobaron en Granada el Código Modelo de 1978. En 1996 ambas asociaciones se fusionaron creando la *Federación Internacional del Hormigón (Fédération Internationale du Béton, FIB)* con sede en Lausana (Suiza). En 1990 se redactó el CEB-FIB 1990, la versión actualmente vigente del Código Modelo, que ha sido la base del Eurocódigo 2 del año 2004 y la de más de 20 reglamentos nacionales de Europa. En España este reglamento es el EHE – 08 (3).

2.3.2. Razón de ser del hormigón armado

El hormigón por si solo es un material que resiste bien a compresión, en torno a 30 MPa , aunque este valor es mucho menor que el del acero que se encuentra alrededor de 400 MPa . Otra de las características del hormigón es su baja resistencia a la tracción, del orden de diez veces menor que la resistencia a la compresión (4).

Se considera una viga fabricada exclusivamente de hormigón, como la mostrada en la Figura 2.16. El valor máximo de la carga q que puede resistir la viga será aquella que genera en las fibras inferiores una tensión igual a la resistencia de tracción del hormigón. Cuando la carga alcance este valor se producirá el colapso de la viga.

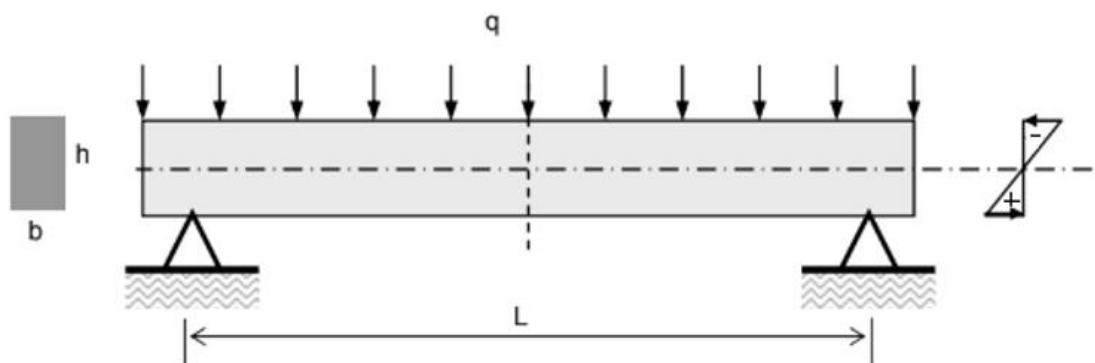


Figura 2.16 Viga de hormigón sometida a una carga distribuida q (4).

Como se puede observar en el diagrama de tensiones normales en la sección transversal al centro de luz, esta configuración somete a compresión la parte del hormigón que se encuentra por encima de la línea neutra de la viga y a tracción la parte inferior de la línea neutra. Debido a la poca resistencia a la tracción que posee el hormigón, se puede intuir que la carga q necesaria para producir el colapso de la viga no será muy elevada. Por tanto, se puede aceptar que no es adecuado introducir elementos hechos solo de hormigón en aplicaciones dónde se generan tensiones de tracción en los mismos.

Con el objetivo de mejorar los inconvenientes que se han descrito anteriormente, se plantea la necesidad de introducir un material al cuerpo de hormigón, que resista las tensiones de tracción que el hormigón no puede soportar. Este material es el acero y se coloca en las zonas dónde se desarrollan las tracciones. La combinación de estos dos materiales es lo que denominamos hormigón armado.

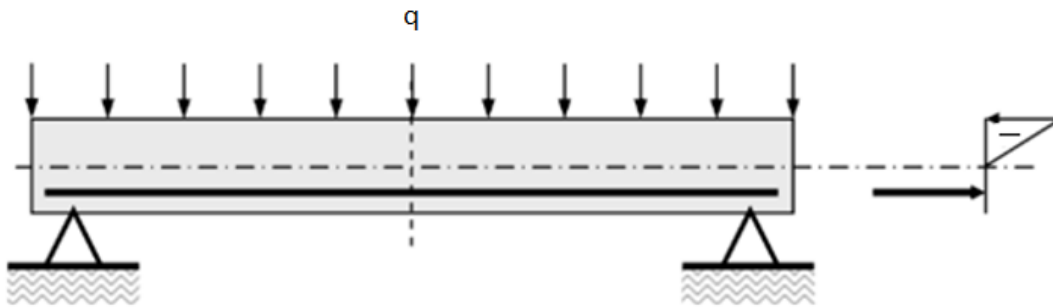


Figura 2.17 Viga de hormigón armado sometida a una carga distribuida q (4).

Como se puede observar en el diagrama de tensiones normales en la sección transversal al centro de luz, no se considera la colaboración del hormigón en la parte de la sección sometida a tracción ya que se encarga de soportarla el acero. Por tanto, se puede considerar que en todo el elemento estructural el hormigón solo trabaja a compresión.

2.3.3. Particularidades del hormigón armado

A continuación, se presentarán dos particularidades del acero armado que lo hace un gran material para la construcción de edificios.

La primera de estas particularidades es que el hormigón genera cal libre durante su fraguado y endurecimiento $Ca(OH)_2$, esto hace que tenga un pH muy elevado, alrededor de 12. Este ambiente alcalino protege el acero de la corrosión. Esta cualidad es de gran importancia si la estructura se encuentra en un ambiente húmedo en el cual el acero sin recubrimiento, podría sufrir una disminución de sus propiedades mecánicas a lo largo del tiempo producida por la oxidación del mismo (4).

La segunda se observa en caso de incendio. Como es sabido el acero es muy vulnerable a la acción del fuego, cuando se calienta a altas temperaturas pierde las características mecánicas que deseamos que tenga un acero estructural. Pero al estar recubierto por una capa de hormigón, este se encuentra bien aislado y la combinación puede permanecer expuesta a grandes temperaturas durante horas sin que su capacidad mecánica se vea alterada (4).

2.4. Cálculo de secciones de varios materiales

Se considera una pieza formada por varios materiales de manera que las interfaces entre ellos sean paralelas a la directriz de la pieza. Se considera que la sección recta de la pieza se divide en varias zonas Ω_i , cada una de las cuales tiene un área A_i que corresponden a un material con un módulo de Young E_i , tal como se muestra en la Figura 2.18 (5).

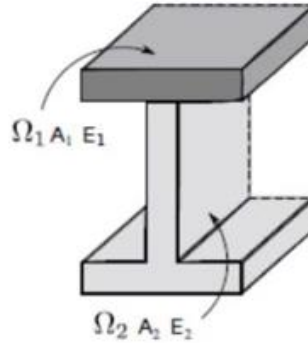


Figura 2.18 Sección de varios materiales (5).

Se considera también un material de referencia, que puede ser o no igual a uno de los materiales que componen la pieza, y que tiene un módulo de elasticidad que será asociado con el símbolo \bar{E} . Para cada material de la sección se puede definir un coeficiente de equivalencia con el material de referencia de forma $n_i = E_i / \bar{E}$.

2.4.1. Compresión

Ahora se supone que la deformación de la pieza tiene lugar según la hipótesis de Bernoulli, de manera análoga a las piezas de un único material. En este caso, todas las fibras longitudinales de la pieza tienen idéntica deformación longitudinal ε_x (5).

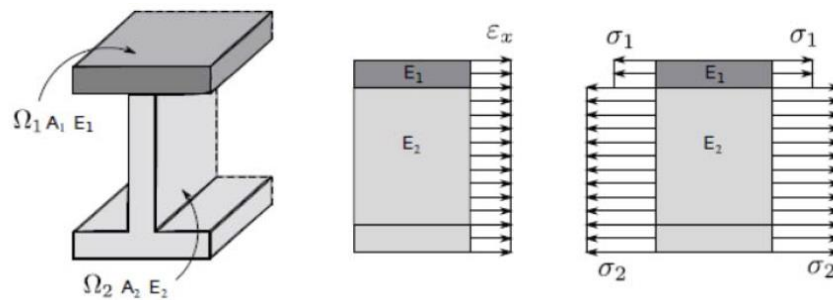


Figura 2.19 Sección de varios materiales sometida a compresión (5).

La tensión en un punto del material i será:

$$\sigma_{xi} = E_i \varepsilon_x = n_i \bar{E} \varepsilon_x \quad (\text{Ecu. 2.19})$$

Ahora la ecuación de equilibrio interno se escribe como:

$$N = \int_S \sigma_x dS = \int_S n_i \bar{E} \varepsilon_x dS = \bar{E} \varepsilon_x \int_S n_i dS = \bar{E} \bar{A} \varepsilon_x \quad (\text{Ecu. 2.20})$$

donde la integral $\bar{A} = \int_S n_i dS$ se le llama área homogenizada y área equivalente de la sección. A partir de la ecuación anterior, se obtiene el alargamiento de las fibras:

$$N = \int_S \sigma_x dS = \int_S n_i \bar{E} \varepsilon_x dS = \bar{E} \varepsilon_x \int_S n_i dS = \bar{E} \bar{A} \varepsilon_x \quad (\text{Ecu. 2.21})$$

Si se combinan las Ecuaciones 2.19 y 2.21 se tiene que la tensión es diferente para cada material y es:

$$\sigma_x = E_i \varepsilon_x = n_i \frac{N}{\bar{A}} \quad (\text{Ecu. 2.22})$$

lo que quiere decir que los materiales más rígidos soportan tensiones más elevadas, tal como se muestra en la Figura 2.19 dónde se ha supuesto que $E_2 > E_1$.

Obsérvese que además es necesario que:

$$M_y = \int_S \sigma_x z dS = 0$$

$$M_z = - \int_S \sigma_x y dS = 0$$

Siendo $\sigma_x = n_i N / \bar{A}$ esto implica que $\int_S z n_i dS = \int_S y n_i dS = 0$, es decir, que el eje esté aplicado en el centro mecánico de la sección.

2.4.2. Flexión pura recta

Se considera una pieza sometida a flexión pura según uno de sus planos principales de inercia, por ejemplo, a un momento flector M_z que se encuentra contenido en el plano xy . Se supone que la deformación de la pieza sigue la hipótesis de Navier-Bernulli igual que ocurre en las piezas de un solo material (Fig. 2.19) (5).

En el caso que nos ocupa, las secciones permanecen planas cuando se deforman y la deformación longitudinal de una fibra será proporcional a la distancia \hat{y} de ésta al eje neutro, paralelo al eje z y de posición por ahora desconocida, es decir:

$$\varepsilon_x = -\frac{\hat{y}}{\rho_z} \quad (\text{Ecu. 2.23})$$

En el caso que los distintos materiales de la sección cumplan la ley de Hooke, la tensión en una fibra será

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = n\bar{E}\varepsilon_x \quad (\text{Ecu. 2.24})$$

donde E y n son los pertenecientes al material de la fibra correspondiente. Puesto que el axil que actúa sobre la sección es nulo. Se exige, para satisfacer la correspondiente ecuación de equilibrio que:

$$N = \int_S \sigma_x dS = \int_S n\bar{E}\varepsilon_x dS = -\frac{\bar{E}}{\rho_z} \int_S \hat{y} n dS = 0 \rightarrow \int_S \hat{y} n dS = 0 \quad (\text{Ecu. 2.25})$$

lo que quiere decir que el eje neutro pasa por el centro mecánico de la sección, y coincide con el eje de inercia z , por tanto, $\hat{y} \equiv y$.

Integrando el momento resultante de las tensiones respecto al eje neutro, se obtendrá:

$$M_z = -\int_S \sigma_x dS = \int_S n\bar{E}\varepsilon_x dS = \frac{\bar{E}}{\rho_z} \int_S y^2 n dS = \frac{\bar{E}I_z}{\rho_z} \quad (\text{Ecu. 2.26})$$

Si se combinan las expresiones 2.24 y 2.26 se tiene que la tensión en un punto cualquiera de la sección es:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -n\frac{M_z y}{I_z} \quad (\text{Ecu. 2.27})$$

Se puede concluir, que las expresiones obtenidas para flexión recta de piezas de un único material se pueden generalizar al caso de piezas de varios materiales. De la misma forma, se puede hacer para el caso de la flexión desviada.

Cabe señalar que las expresiones anteriores son válidas si se cumplen dos requisitos: 1) La deformación de las secciones debe ser plana (hipótesis de Navier-Bernoulli) y 2) que el comportamiento de los materiales es elástico lineal (ley de Hooke). Con el fin de cumplir el primer requisito la unión entre los materiales de la pieza debe ser suficientemente rígida para que no se produzcan movimientos relativos

entre las interfaces, es decir, como una única pieza. Para el cumplimiento del segundo, el valor de las tensiones debe ser suficientemente pequeño para que no se produzcan fenómenos no lineales como: fluencia, fisuración, aplastamiento, etc.

2.5. Reducción dimensional y descomposición de dominios

Los pilares sobre los que descansan las teorías estructurales clásicas son dos: 1) la existencia de un volumen o subestructura sobre el que formular las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad. 2) La simplificación de la información que cada volumen transmite a volúmenes contiguos en términos de fuerzas y deformaciones. Tal y como se ha explicado, en la Teoría de elasticidad, este volumen es considerado infinitesimal, es decir, un punto, y las simplificaciones se materializan en la parametrización de fuerzas y deformaciones, mediante el tensor de tensiones y deformaciones. En vigas, el volumen es la rebanada diferencial, y se ignoran efectos locales debido a la aplicación de las cargas, solo se consideran el efecto de las fuerzas y momentos resultantes (6).

En los problemas que se abordarán en este proyecto, la descomposición en volúmenes elementales no presenta ninguna dificultad, se parte de la hipótesis de que la partición viene dada de forma natural. Lo que no es tan obvio es como parametrizar el estado de deformaciones y de fuerzas en el volumen representativo, y la posterior tarea de plasmar las simplificaciones en las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad. La necesidad de las hipótesis que simplifican la forma del volumen se aprecian claramente cuando uno estudia Resistencia de Materiales: a excepción del comportamiento a axil y flexión pura, el resto de estados de deformación (torsión y cortante) requieren de hipótesis simplificadoras de la forma de la sección, perfiles de pared delgada, de pared gruesa, circulares, abiertos, etc.

A fin de soslayar esta dificultad y desarrollar un método capaz de parametrizar con pocas variables la interacción entre los diferentes dominios. En este proyecto se delega la tarea de simplificación a los llamados algoritmos de reducción dimensional. Con esto se pretende identificar patrones característicos de interacción entre dominios. Una vez identificados estos patrones, se pueden utilizar técnicas estándar de descomposición de dominios para condensar las ecuaciones de gobierno en las interfaces entre dominios, y llegar a un sistema global en el cual el número de incógnitas dependa únicamente del número de subdominios, y no de la malla de elementos finitos en la que se están discretizando los mismos.

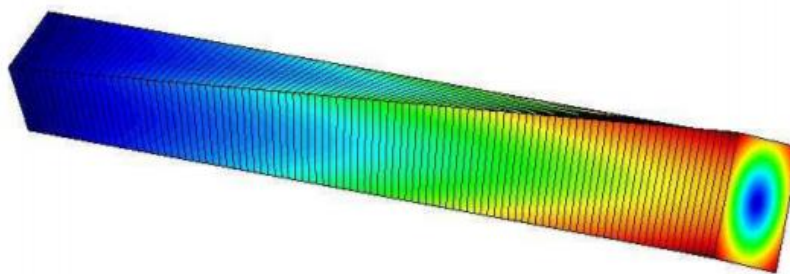


Figura 2.20 Torsión elástica de una viga de sección cuadrada. La viga está bi-empotrada, con un giro que genera torsión en su extremo derecho. En el pos-proceso, la viga se divide en 100 rebanadas y la deformación en fuerzas y desplazamientos de cada rebanada es analizada utilizando el SVD (6).

Una técnica de reducción dimensional es un algoritmo de compresión de datos: el *input* debe ser una matriz de datos, y el objetivo de estos algoritmos es extraer los elementos esenciales de la información contenida en la matriz. En este trabajo se utiliza el que quizá sea el algoritmo de compresión más conocido y transversal (sirve para comprimir todo tipo de información, desde imágenes e páginas web): la descomposición en valores singulares (SVD, en sus siglas en inglés). Este método es capaz de aproximar las columnas de una matriz como combinación lineal de unos pocos modos dominantes en sentido estadístico. A continuación, se explicará con un sencillo ejemplo, estructura prismática dividida en rebanadas, el funcionamiento del SVD como herramienta de identificación de patrones dominantes.

2.5.1. Aplicación del SVD: viga de sección cuadrada

En la Figura 2.20 se muestra la deformada calculada, con el MEF, de una viga elástica de sección cuadrada sometida a un giro de torsión en uno de sus extremos. La preparación de los datos para el SVD, constan en dividir la viga en 100 rebanadas, y se almacenan los campos de fuerzas de interacción entre rebanadas y desplazamientos en matrices. La síntesis del resultado SVD sobre la matriz de fuerzas se ilustra en la Figura 2.21. En esta se presenta la gráfica de la intensidad de cada modo a lo largo de la viga. Se observa que el primer modo (nótese que tiene la distribución radial característica del cortante en torsión) captura el 99% de la información de la matriz de fuerzas. El 1% restante corresponde a modos secundarios que sólo tienen efecto en los bordes, esto no es más que la confirmación de la hipótesis de Saint Venant, antes presentada. El mismo resultado arroja el análisis del estado de deformaciones, representado en la Figura 2.21 (6).

Repitiendo este mismo procedimiento para flexión, cortante y axil, es posible obtener los 5 modos adicionales (Fig. 2.22, se muestran los patrones de deformación). Una vez estos modos están calculados, es posible construir, a partir de las ecuaciones de compatibilidad y equilibrio, un sistema de ecuaciones en el que las incógnitas son los desplazamientos y giros de las caras de la rebanada, esto es, un método estándar de elementos finitos tipo viga.

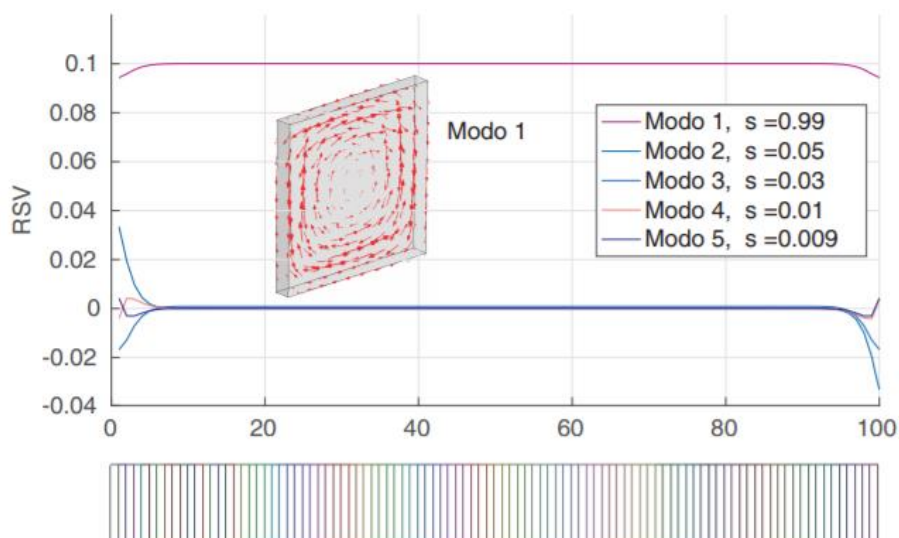


Figura 2.21 Intensidad a lo largo de la viga de los modos SVD de fuerzas obtenidos del problema de torsión (6).

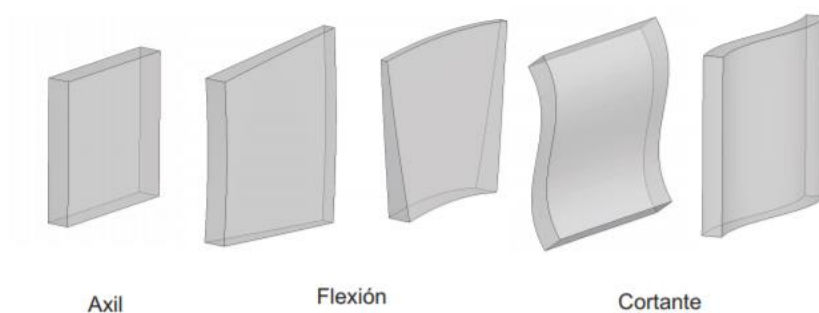


Figura 2.22 Modos de deformación correspondientes a ensayos de flexión simple, compresión/tracción (6).

2.6. Generación de los perfiles

Con el fin de validar mediante la reducción dimensional, las teorías que se han utilizado tradicionalmente para realizar el estudio de vigas de hormigón armado que se encuentran sometidas a un sistema de fuerzas. Se han creado distintos perfiles utilizando el programa Solid Works, para posteriormente someterlos a estudio.

Primeramente, se han creado perfiles de columnas de hormigón armado para ser ensayadas a compresión. Respecto a la construcción de edificios, las columnas de hormigón armado son elaboradas en la misma obra. Primero, se realiza el armado de acero que irá dentro de la columna, seguidamente se envuelven las barras de acero con un encofrado desmontable y se vierte el hormigón dentro del mismo. Finalmente, una vez ha pasado el tiempo de fraguado del hormigón, se retira el encofrado, obteniendo así la columna, como se muestra en la Figura 2.23.

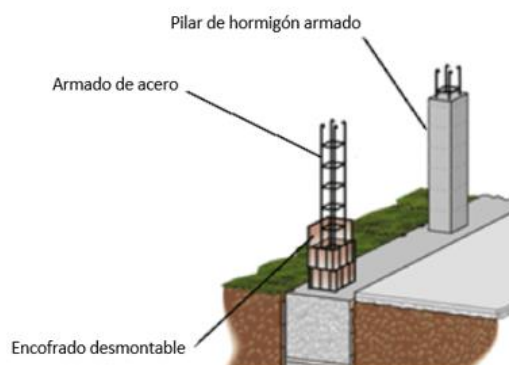


Figura 2.23 Elaboración de una columna de hormigón armado (10).

Las columnas de hormigón armado acostumbran a tener perfiles rectangulares o circulares. En consecuencia, estos son los perfiles que se han desarrollado. Para su diseño se ha utilizado la norma que rige los elementos constructivos de hormigón armado en España, esta es la EHE 08. En la página 20 del capítulo II establece, una clasificación de los ambientes a los que puede estar sometida la columna de hormigón armado (7). Esta clasificación es importante porque es necesaria para definir el recubrimiento, que es la distancia entre la superficie exterior de la armadura (incluyendo cercos y estribos) y la superficie del hormigón más cercana. En el presente estudio se supone que estamos en un ambiente no agresivo, este tiene una designación de tipo I e implica que las columnas se encuentran en interiores de edificios y no están sometidas a condensaciones.

Una vez determinado el ambiente en el que trabajara la columna de hormigón, se puede calcular el valor del recubrimiento como determina la norma en la página 88 del capítulo VII con la siguiente fórmula (8):

$$r_{nom} = r_{mín} + \Delta r \quad (\text{Ecu. 2.28})$$

Donde:

r_{nom} Recubrimiento nominal.

$r_{mín}$ Recubrimiento mínimo. Este se establece en la página 90 del capítulo VII con el tipo de ambiente escogido anteriormente y la vida útil del proyecto, que se ha supuesto de 100 años. Obteniendo un valor de 25 milímetros.

Δr Margen de recubrimiento. Se escoge de 5 milímetros porque las columnas de hormigón se ejecutan *in situ* con nivel intenso de control de ejecución.

Se expone el siguiente ejemplo de diseño para una de las secciones de columnas de hormigón armado que se han utilizado para realizar el presente estudio

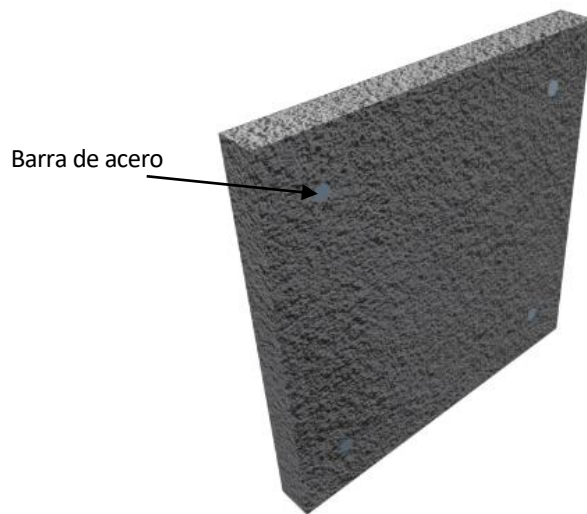


Figura 2.24 Sección de la columna de hormigón armado de dimensiones 300x300 milímetros.

La geometría mostrada en la Figura 2.24, es de sección rectangular de 300x300 milímetros con cuatro varillas de acero de 12 milímetros de diámetro, aún que no esté representado en la sección se supone que la columna de hormigón tiene un cerco de 6 milímetros de diámetro cada 15 centímetros. Este no se dibuja ni se tendrá en cuenta en los ensayos y cálculos realizados posteriormente para que se cumpla el principio de Saint – Venant, pero es necesario para determinar la distancia que existirá de la superficie del hormigón a la de la barra de acero, con el fin de ensayar un modelo lo más real posible.

Si se aplica la Ecuación 2.28 con los valores de r_{min} y Δr antes descritos se obtiene un valor de r_{nom} de 30 milímetros, este será común para todas las geometrías creadas. Ahora para encontrar la distancia entre el hormigón y la superficie de las barras de acero, se debe sumar a la r_{nom} el diámetro del cerco obteniendo así una distancia total de 36 milímetros.

A continuación, se ha creado un perfil de viga rectangular de hormigón de 120 milímetros de base y 240 milímetros de altura, que va a ser reforzado por su parte inferior mediante una placa de acero de espesor 10 milímetros, este será ensayado a flexión compuesta recta (5).

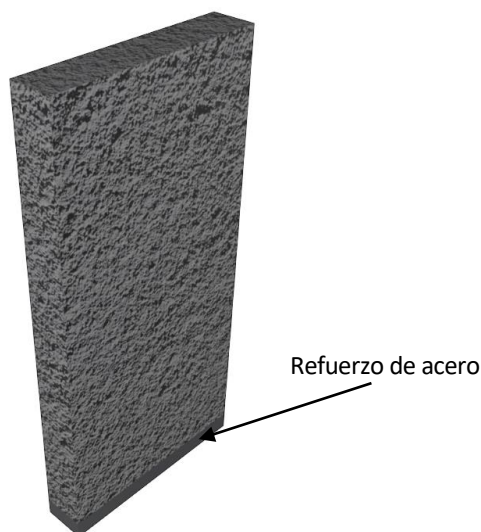


Figura 2.25 Sección de la viga de hormigón armado con refuerzo de acero.

Finalmente, se ha creado un perfil IPN 200 con dos refuerzos de madera perfectamente unidos a las alas, este será ensayado a flexión simple (5).



Figura 2.26 Sección de la viga de acero con refuerzos de madera.

El perfil Doble T normal (IPN) también denominado sección en I con alas inclinadas o perfil I normal, se fabrica en acero mediante la técnica de laminado en caliente. Es un perfil de viga normalizado del cual se pueden encontrar sus características tabuladas, como son: las propiedades geométricas, masas y los momentos de inercia. Respecto a las características dimensionales; las caras exteriores de las alas son perpendiculares al alma y las interiores están dotadas de una inclinación del 14%, creando así un espesor decreciente hacia los bordes. Las uniones entre las caras del alma y las caras interiores de las

alas son redondeadas. Las alas tienen aristas interiores vivas y las exteriores redondeadas. Estos perfiles se designan con las letras IPN, seguidas de un número que indica la altura total nominal del perfil, expresada en milímetros.

Con el fin, de poder ensayar todas las secciones creadas, estas deben tener un grosor definido. Para todas ellas será del 10% de la altura de la sección. Por tanto, en el primer caso el grosor será de 30 milímetros, en el segundo de 25 milímetros y en el tercero de 20 milímetros.

3. Desarrollo del método de orden reducido

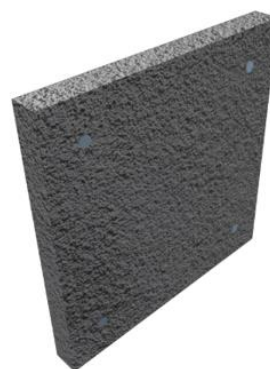
A continuación, se describirán los procedimientos que se han seguido para obtener los desplazamientos nodales con el fin de resolver el problema. También se detallarán los pasos a seguir, los procesos que se involucran en el modelizado de orden reducido y la descomposición del dominio con el algoritmo de orden reducido. Solo se mostrará el procedimiento seguido para la sección cuadrada de 300x300 milímetros, debido a que es el mismo para todas las secciones estudiadas. En los Anexos A y B se encuentran para el resto de secciones.

3.1. Perfiles generados y entrenados

A fin de realizar la validación de las teorías aplicadas al cálculo analítico de secciones de varios materiales, se han creado los siguientes perfiles:

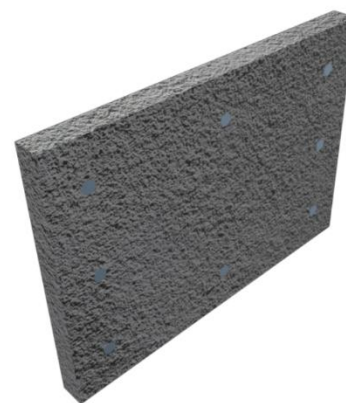
Perfil cuadrado de 300x300 mm

- Dimensiones del hormigón: 300x300 mm
- Grosor de la sección: 30 mm
- Número de barras de acero: 4
- Diámetro de las barras: 12 mm



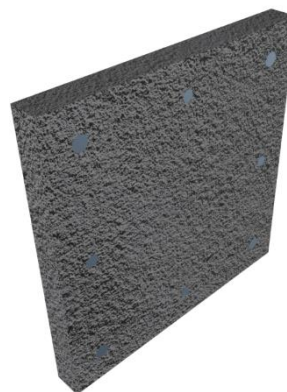
Perfil rectangular de 350x250 mm

- Dimensiones del hormigón: 350x250 mm
- Grosor de la sección: 25 mm
- Número de barras de acero: 8
- Diámetro de las barras: 12 mm

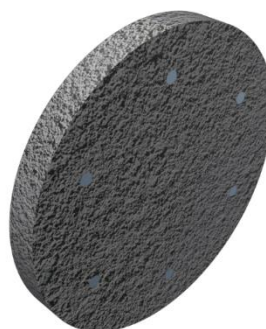


Perfil cuadrado de 400x400 mm

- Dimensiones del hormigón: 400x400 mm
- Grosor de la sección: 40 mm
- Número de barras de acero: 8
- Diámetro de las barras: 16 mm y 20 mm

**Perfil circular de diámetro 300 mm**

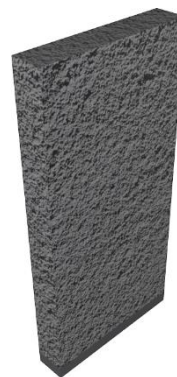
- Dimensiones del hormigón: $\varnothing 300$ mm
- Grosor de la sección: 30 mm
- Número de barras de acero: 6
- Diámetro de las barras: 16 mm

**Perfil circular de diámetro 400 mm**

- Dimensiones del hormigón: $\varnothing 400$ mm
- Grosor de la sección: 40 mm
- Número de barras de acero: 6
- Diámetro de las barras: 16 mm

**Perfil rectangular con refuerzo de acero**

- Dimensiones del hormigón: 120x240 mm
- Grosor de la sección: 25 mm
- Dimensiones refuerzo de acero: 120x10 mm



Perfil rectangular con refuerzos de madera

- **Dimensiones del hormigón:** IPN200 (normalizadas)
- **Grosor de la sección:** 20 mm
- **Dimensiones de la madera:** 90x50 mm



3.2. Mallado

Para realizar el mallado del cuerpo que se quiere estudiar, nos debemos remitir al algoritmo de descomposición del dominio. Este indica que un cuerpo se puede generar a partir de repetir un dominio un número definido de veces. En consecuencia, solo se debe crear un dominio que el programa repetirá, de una manera estructurada, tantas veces como se le indique (9). En este apartado se indica como se ha generado el dominio de la sección 300x300 mm. Se sigue el mismo procedimiento para todas las secciones.

El primer paso que se ha realizado, ha sido el modelado de la sección, para este se ha utilizado el programa Solid Works y se han seguido las indicaciones y cálculos descritos con anterioridad en el Apartado 2.5. Es necesario indicar que, para el correcto funcionamiento del código la sección debe estar situada en el plano yz.

A continuación, se ha utilizado el software comercial de pre-proceso y pos-proceso denominado GID, con el objetivo de generar el mallado de la sección. Se ha generado una malla de tamaño 0,005 para el hormigón. En cambio, para el acero, se ha creado dividiendo el perímetro de la sección transversal de las barras en 60 divisiones. Ambas mallas son compuestas por elementos hexaédricos de 8 nodos. Estas se pueden observar en la Figura 3.1.

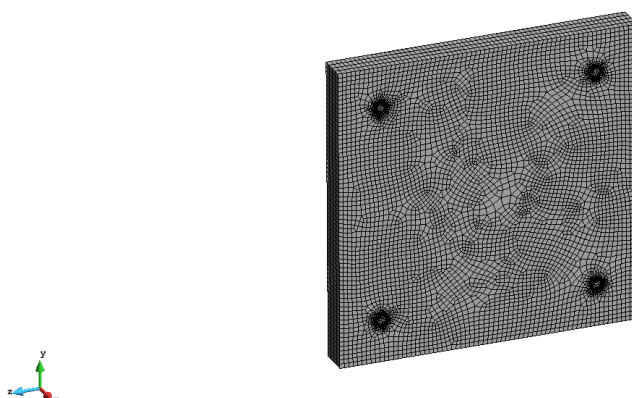


Figura 3.1 Malla hexaédrica del perfil 300x300 mm.

El tamaño de la malla no ha sido escogido al azar, ya que es de vital importancia para la generación de la viga y para la certeza de los resultados, para ello se ha realizado un estudio de convergencia. Este estudio consiste en escoger una zona del cuerpo y analizar algunas de sus características como son las deformaciones y las tensiones, mientras se va afinando la malla hasta que los valores obtenidos de las características escogidas converjan. El estudio, ha sido realizado en la cara donde se produce el máximo de la deformación y de las tensiones, esta se muestra en la Figura 3.2.

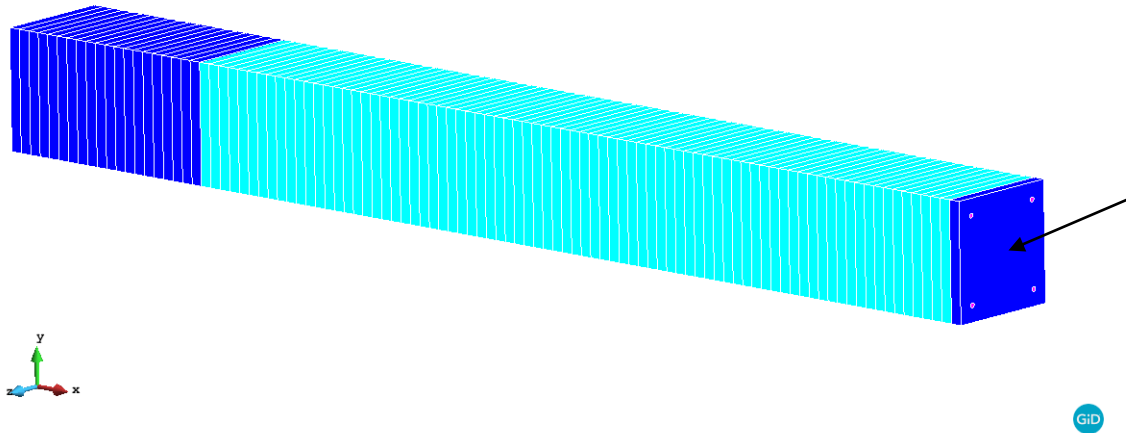


Figura 3.2 Zona donde se realiza el estudio de convergencia.

Número de nodos	Tensión hormigón eje x (Pa)	Tensión acero eje x (Pa)	Desplazamiento eje x (m)	Tamaño de malla del hormigón	Número de divisiones de la malla del acero
609	1,0732E+07	8,7157E+07	1,296E-03	0,03	0
5345	1,0727E+07	8,6676E+07	1,291E-03	0,01	10
13120	1,0723E+07	8,6409E+07	1,288E-03	0,007	30
19015	1,0722E+07	8,6381E+07	1,288E-03	0,006	40
28450	1,0722E+07	8,6378E+07	1,288E-03	0,005	60

Tabla 3.1 Datos obtenidos para realizar el pertinente estudio de convergencia.

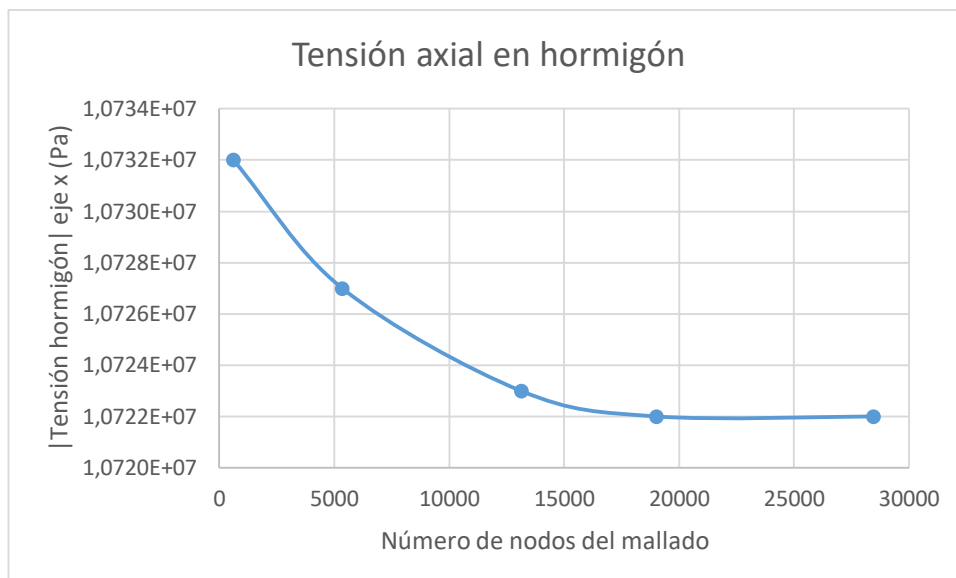


Figura 3.3 Estudio de convergencia para la tensión axial del hormigón.

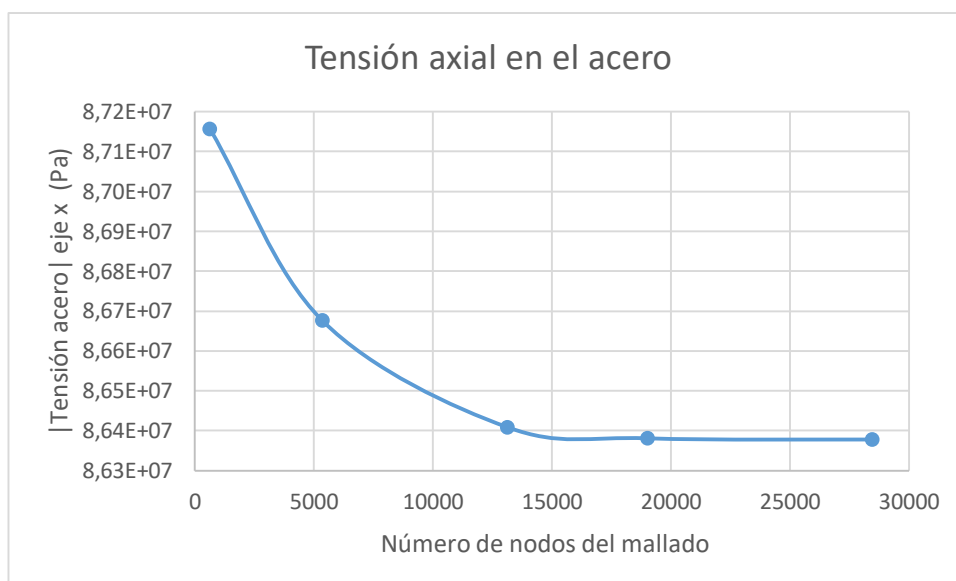


Figura 3.4 Estudio de convergencia para la tensión axial del acero.

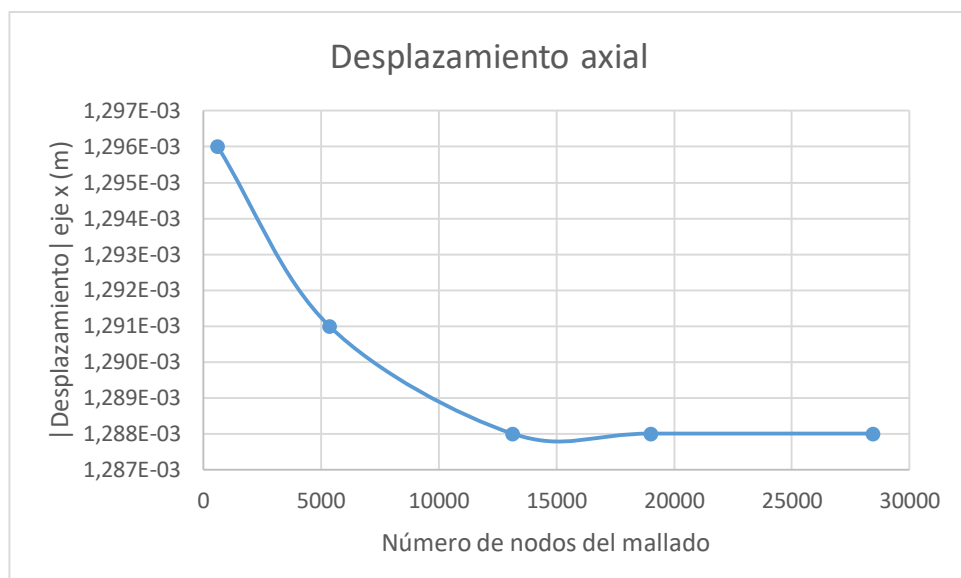


Figura 3.5 Estudio de convergencia para el desplazamiento.

3.3. Entrenamiento básico

Se denomina entrenamiento básico a las pruebas con distintos esfuerzos, a las que se somete el dominio anteriormente creado, para capturar los patrones de deformación. Este entrenamiento, permite familiarizar la rebanada con los esfuerzos que se le puede someter, cuando forme parte de una viga y a esta se le aplique cualquier configuración de carga. Con el objetivo, que las rebanadas y por tanto la viga, se comporte de forma adecuada, según el sistema de cargas aplicado. El entrenamiento se puede realizar solo con un dominio siempre que se utilicen condiciones periódicas. Las condiciones periódicas imponen que los desplazamientos de las dos caras de una misma sección transversal, deben comportarse con el mismo patrón. De este modo, la simulación que se realiza se asemeja a una con más dominios, la diferencia reside en que la simulación con más dominios se centra en los efectos locales, mientras que la realizada en este proyecto lo hace en los modos dominantes de la estructura (9).

El algoritmo de entrenamiento se puede comparar con el que utiliza Google en su buscador, por ejemplo, cuando en este se escribe *<Reljo>* en la barra de búsqueda, en lugar de *<Reloj>*, aparece el siguiente mensaje indicativo *<tal vez querías decir: Reloj>*. Esto se debe a que previamente alguien que buscó la palabra *<Reloj>*, la escribió mal y luego la rectificó. El algoritmo aprendió de esta situación de forma automática, haciendo que este se vuelva cada vez más robusto. En la actualidad, este algoritmo está siendo utilizado en cada búsqueda que se realiza.

En primera instancia, se deben cargar las condiciones del tipo de problema, permitiendo que se puedan asignar los materiales y las superficies del dominio. En el caso que nos ocupa, los materiales que conforman la rebanada es el hormigón y el acero B 500 S, el cual es específico para el armado de vigas.

A continuación, se indican las propiedades mecánicas de los dos materiales, utilizadas para el entrenamiento y la posterior simulación.

Acero B 500 S

- $E = 200 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$
- $\nu = 0.3$
- $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \text{ (GPa)}$
- $\rho = 7850 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$

Hormigón

- $E = 25 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$
- $\nu = 0.2$
- $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \text{ (GPa)}$
- $\rho = 2300 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$

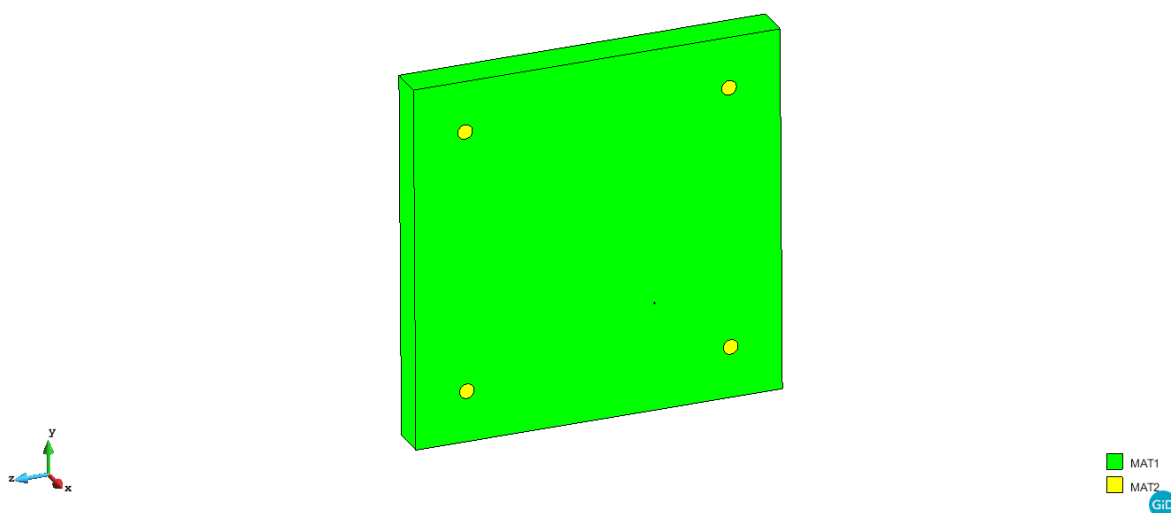


Figura 3.6 Materiales del perfil rectangular 300x300 mm. El “MAT 1” es el hormigón y el “MAT 2” el acero.

Por otra parte, en la Figura 3.7 se muestra la definición de caras de la sección. Se debe tener en cuenta que esta definición de caras se aplicará en todos los dominios que se estudiarán.

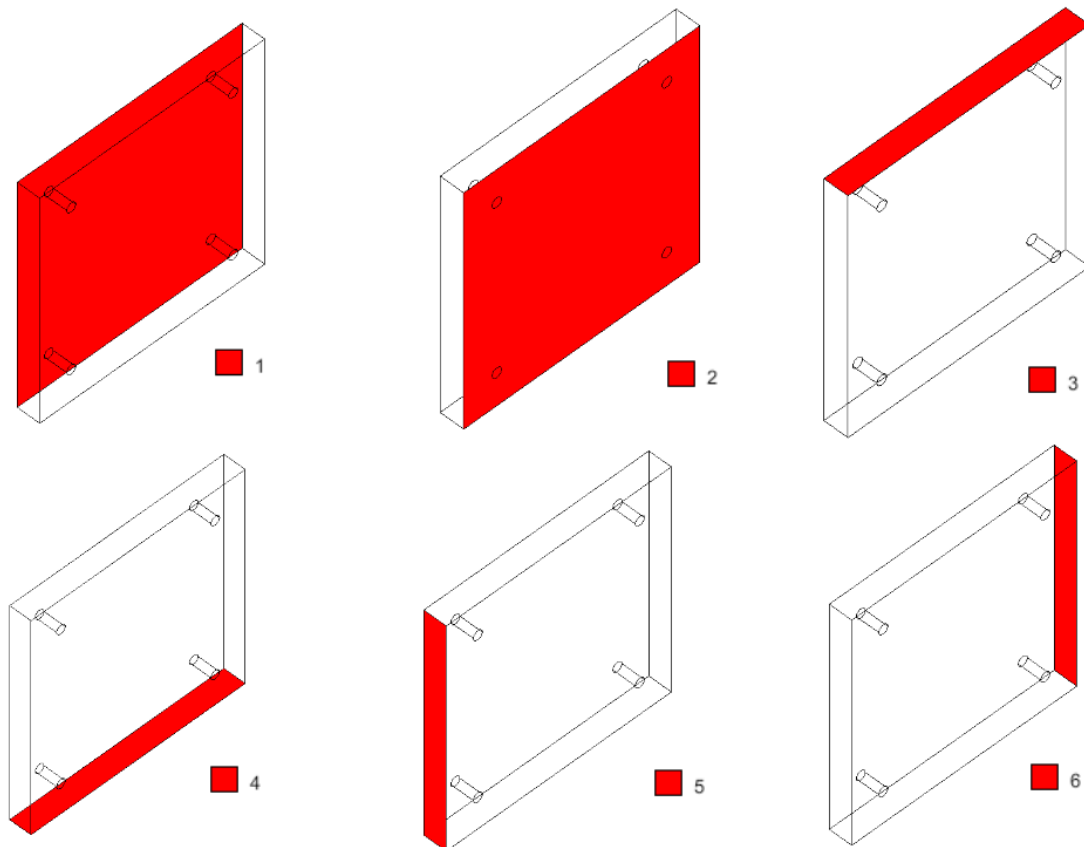


Figura 3.7 Asignación de caras perfil rectangular 300x300 mm.

Las pruebas de entrenamiento consisten en un conjunto de desplazamientos impuestos sobre ciertas caras de las previamente definidas. De aquí, se obtendrán los desplazamientos de los nodos resolviendo el problema elastoestático. Nótese que durante el testeo ninguna fuerza es aplicada, sólo se restringen ciertos desplazamientos. A continuación, se mostrará el entrenamiento básico que nos permitirá obtener los modos básicos, para la sección rectangular de 300x300 mm.

3.3.1. Ensayo axial

A continuación, se mostrará el En el ensayo axial se impone un desplazamiento en la dirección x en la cara 2 (Fig. 3.7). El valor impuesto de desplazamiento es de 10 milímetros, este no afecta de ninguna manera a los modos obtenidos con el ensayo ya que se trata de un problema elástico lineal y estos son independientes. En la Figura 3.8 se puede observar el resultado en términos de tensiones axiales como era de esperar, la tensión σ_{xx} toma un valor constante en el hormigón y otro, también constante, en las barras de acero. Del mismo modo, se muestra el resultado de los desplazamientos en la Figura 3.9, tal y como se ha presentado anteriormente, la sección presenta un desplazamiento de 10 milímetros de la cara 2, este es el mismo tanto para el acero como para el hormigón, cumpliendo así la teoría de vigas compuestas de varios materiales (9).

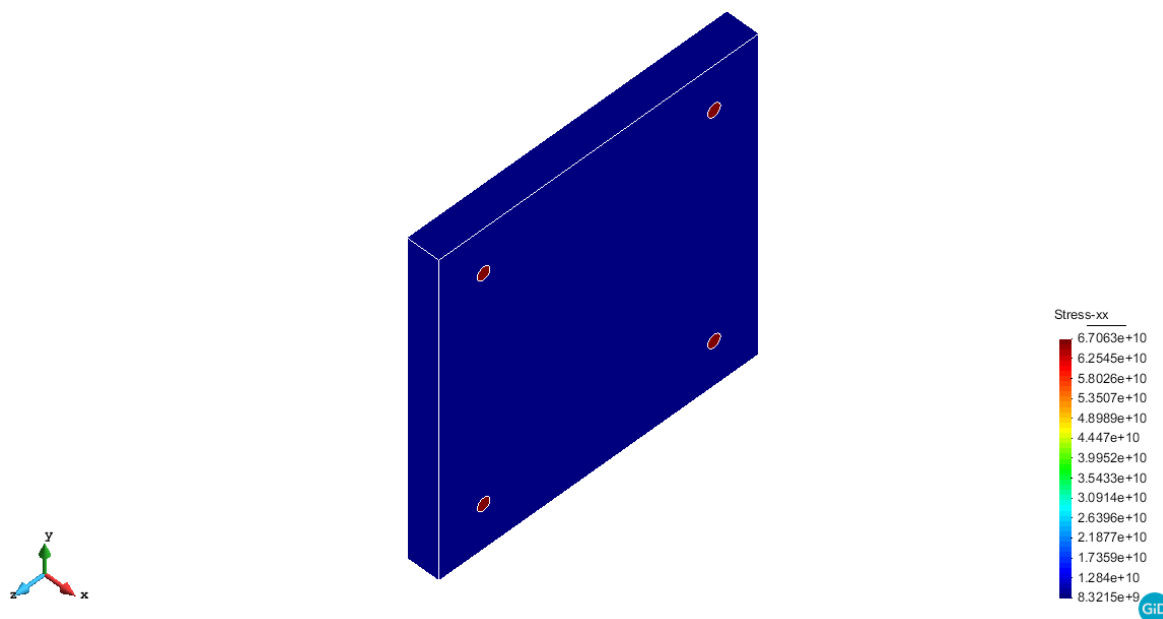


Figura 3.8 Ensayo axial, tensión σ_{xx} (Pa).

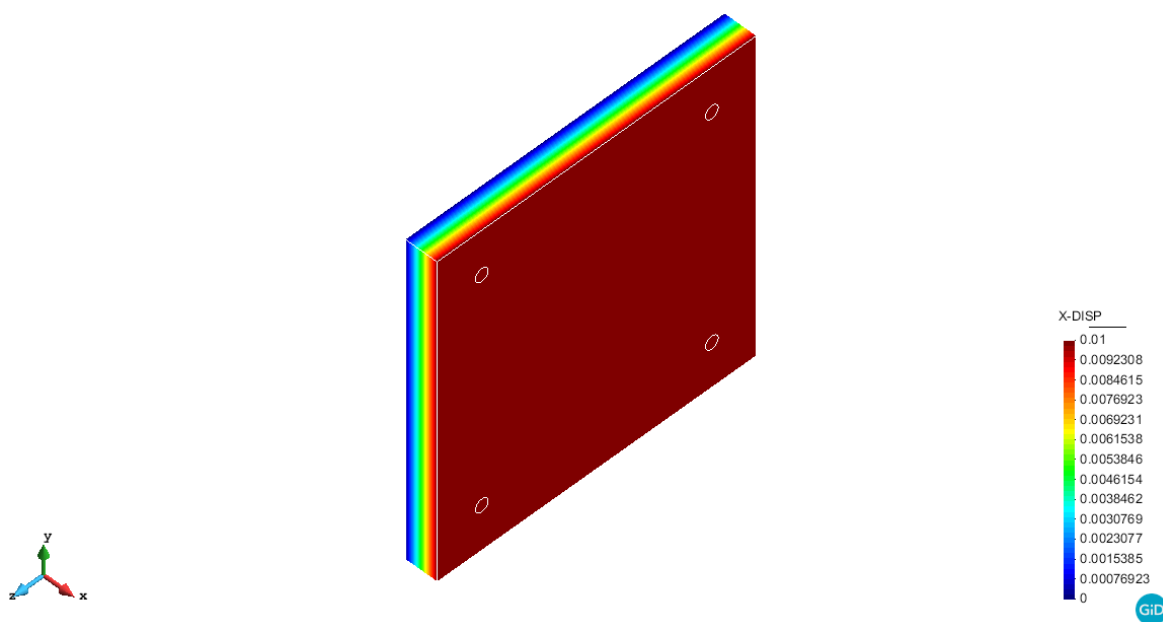


Figura 3.9 Ensayo axial, desplazamiento en x (metros).

Al realizar el ensayo, provocando un desplazamiento de la sección en el eje x , se aprecia un estrechamiento en las direcciones perpendiculares al mismo, este comportamiento es conocido como el efecto Poisson. Para ver este efecto de forma clara, en la Figura 3.10 se compara la sección sin deformar y la sección deformada que se le ha impuesto a la cara 2 un desplazamiento de 30 milímetros.

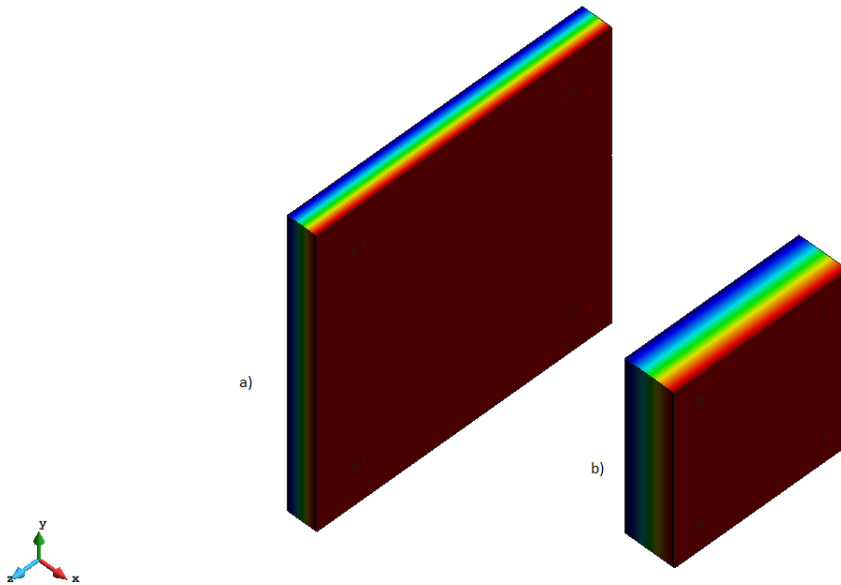


Figura 3.10 Efecto Poisson: a) Sección sin deformar b) Sección deformada con un desplazamiento de 30 milímetros.

3.3.2. Ensayo de torsión

Con el fin de llevar a cabo este ensayo, se aplica un giro de 0.01 radianes alrededor del eje x en la cara 2 de la rebanada. Este está fuertemente vinculado con las tensiones de cizallamiento de la componente x ya que el momento de torsión está directamente relacionado a ellas, tal y como se comprueba en la Ecuación 3.1 (9).

$$M_{tor} = \int (-\tau_{xy}z + \tau_{xz}y) dydz \quad (\text{Ecu. 3.1})$$

Se puede observar el efecto sobre la sección de los cortantes τ_{xy} y τ_{xz} en las Figuras 3.12 y 3.13, respectivamente. Con relación a los desplazamientos, se puede percibir que el máximo se produce en las esquinas de la sección, mientras que el centro de la misma se mantiene estático debido a que es donde se aplica el giro (Fig. 3.11). Este comportamiento es el característico de una sección sometida a torsión en el eje x .

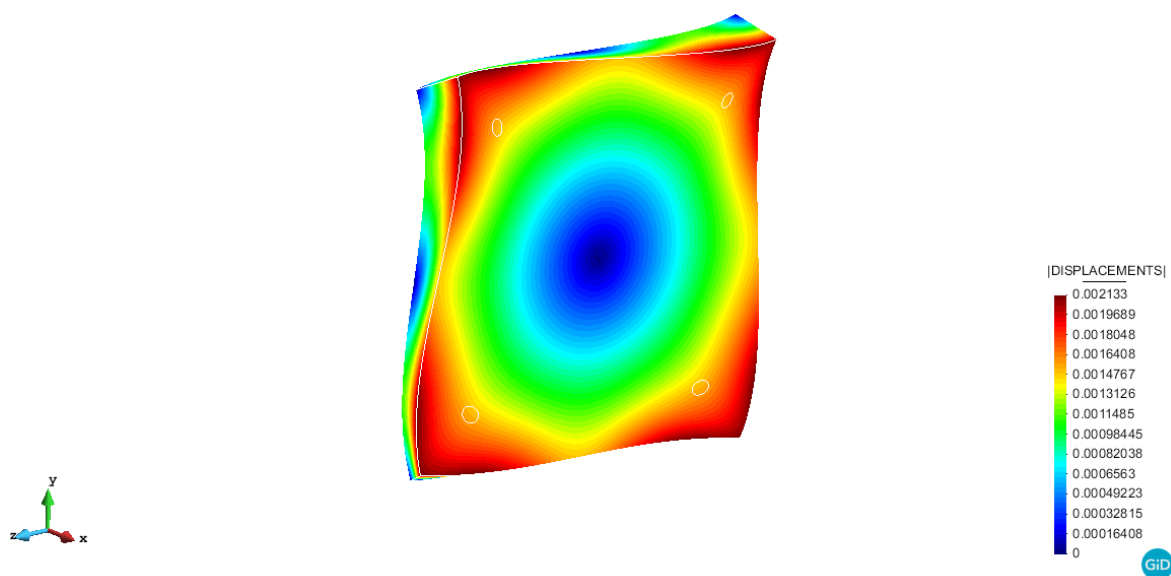


Figura 3.11 Ensayo de torsión, desplazamiento (metros).

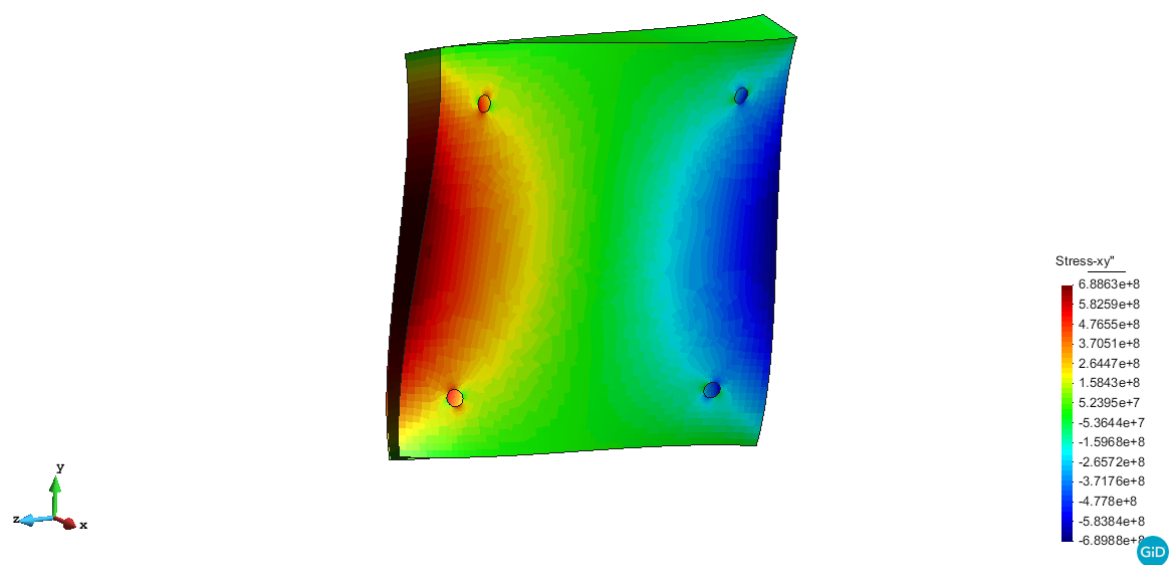


Figura 3.12 Ensayo de torsión, τ_{xy} (Pa).

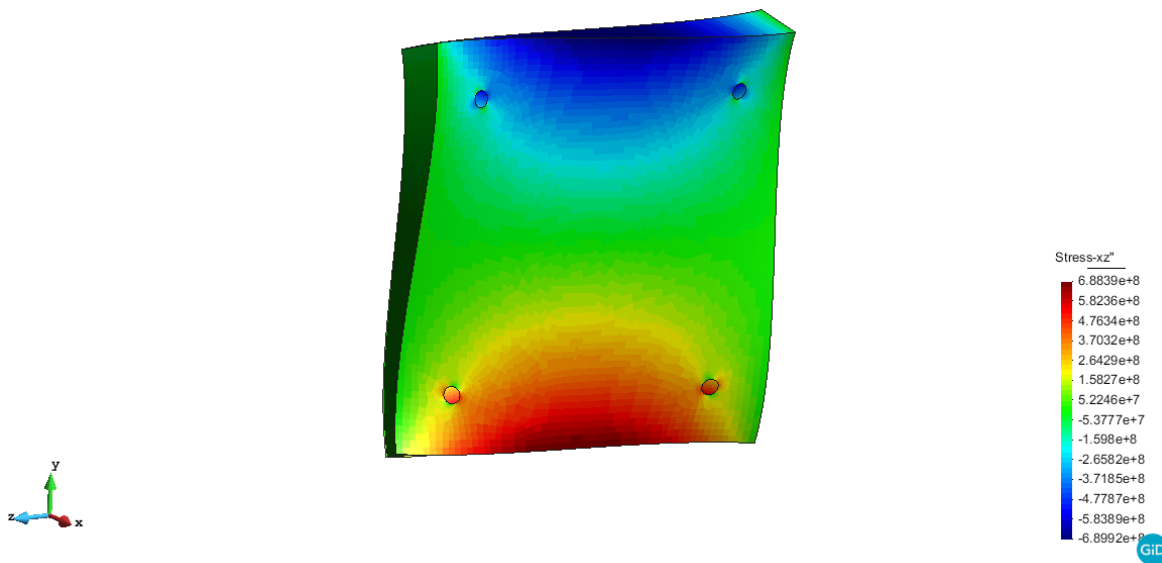


Figura 3.13 Ensayo de torsión, τ_{xz} (Pa).

3.3.3. Ensayo de flexión pura en el eje Y

El ensayo de flexión en el eje y , consiste en imponer un giro alrededor de este en las caras 1 y 2, de módulo 0.01 radianes pero de signos contrarios, en la cara 1 este será anti-horario mientras que en la cara 2 será horario. Con estas condiciones se pretende simular el comportamiento de la sección en una situación donde el sistema de cargas genere flexión pura en el eje y . Las dos rotaciones faciales crean una reducción del grosor del borde posterior debido a que los giros son opuestos. Este doble giro en el eje y , produce un enorme estiramiento en la cuerda de modo que el mayor desplazamiento se encuentra en el eje z (Fig. 3.14). El acero y el hormigón que se encuentran en la misma zona del campo de desplazamientos, tal y como indica la teoría, comparten el mismo valor de desplazamiento. En la Figura 3.15 se muestra la tensión de corte τ_{xz} , se puede observar que esta es casi nula en flexión pura. Esto es debido a la fuerza de corte casi nula, que se puede escribir como $T_y = -\frac{dM_z}{dx}$ y τ_{xz} es proporcional a T_y (9).

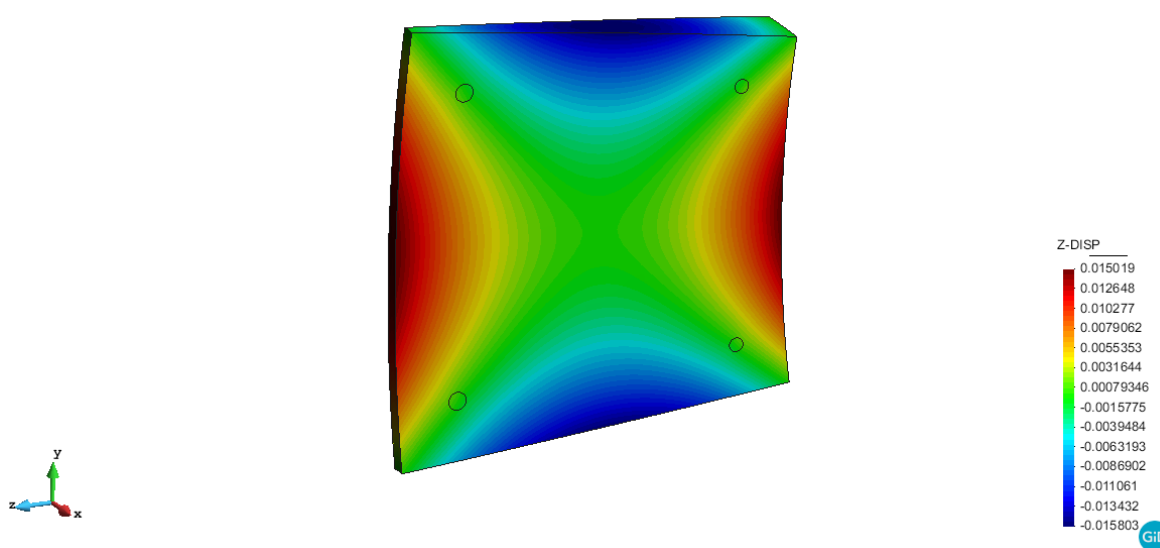


Figura 3.14 Ensayo de flexión pura y, desplazamiento en z (metros).

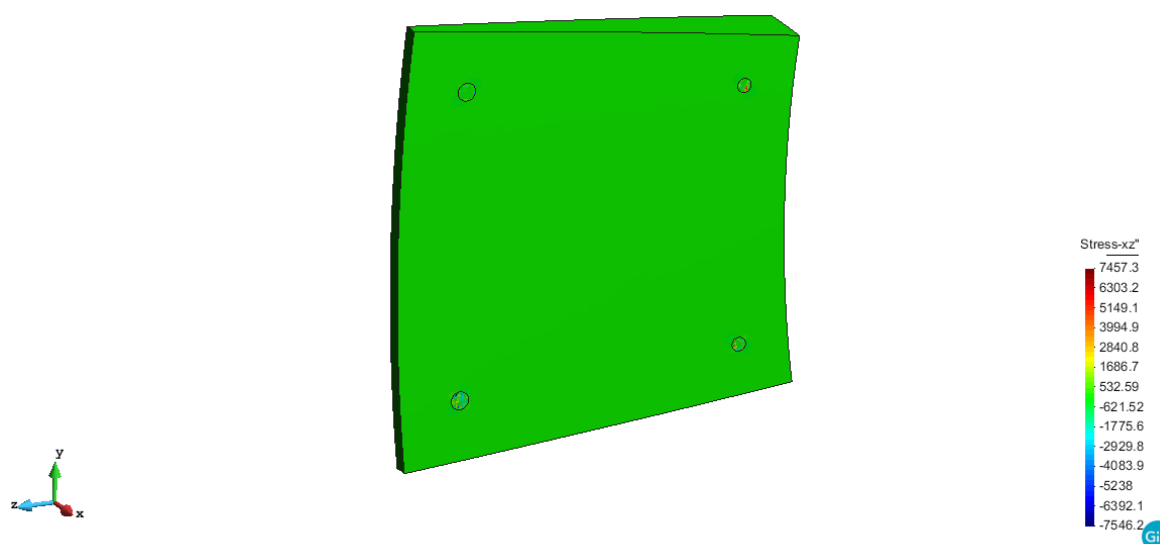


Figura 3.15 Ensayo de flexión pura y, τ_{xz} (Pa).

3.3.4. Ensayo de flexión simple en el eje Y

Para realizar este ensayo se aplica un giro en el eje y de módulo 0.01 radianes en la cara 2, mientras la cara 1 se deja libre de condiciones. Con el objetivo de obtener el comportamiento de la sección sometida a flexión simple en el eje y. También se observa, que el desplazamiento en el eje z se reduce prácticamente a la mitad (Fig. 3.16), esto es lógico ya que solo se rota una cara, en vez de dos. En el caso de la tensión cortante τ_{xz} , a diferencia que en la flexión pura, esta es muy significativa, tal y como presentan las características de una flexión simple en el eje y (9).

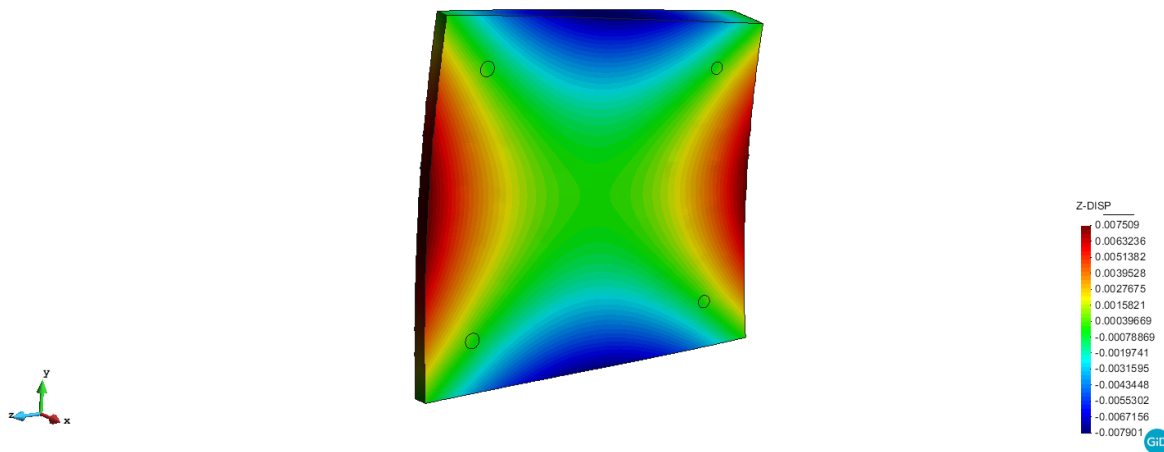


Figura 3.16 Ensayo de flexión simple y, desplazamiento en z (metros).

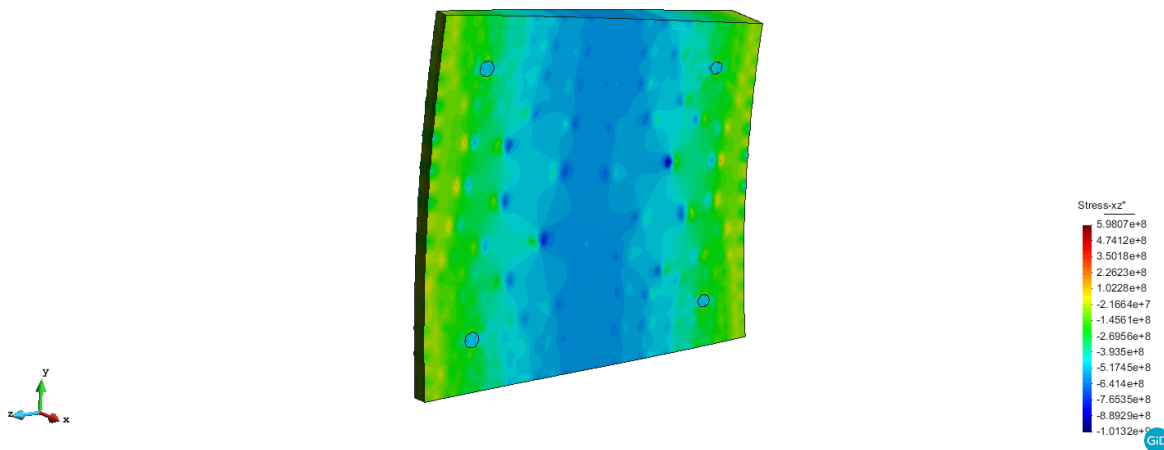


Figura 3.17 Ensayo de flexión simple y, τ_{xz} (Pa).

3.3.5. Ensayo de flexión pura en el eje Z

Con el objetivo de llevar a cabo este ensayo, igual que en el de flexión pura en el eje y, se debe imponer dos giros de módulo 0.01 radianes y de signo contrario en las caras 1 y 2, pero en este caso debe ser alrededor del eje z, en la cara 1 el giro será horario y en la 2 será anti-horario. Imponiendo estas condiciones se quiere obtener el comportamiento de la sección si se somete a flexión pura en el eje z. En este caso tomará mayor notoriedad el desplazamiento en el eje y, el cual es mostrado en la Figura 3.18. Esta vez en la Figura 3.19 se muestra la tensión de corte τ_{xy} , ya que es proporcional a T_z , que se puede obtener mediante la expresión $T_z = \frac{dM_z}{dx}$. Como se ha indicado con anterioridad, en flexión pura el esfuerzo cortante es prácticamente nulo (9).

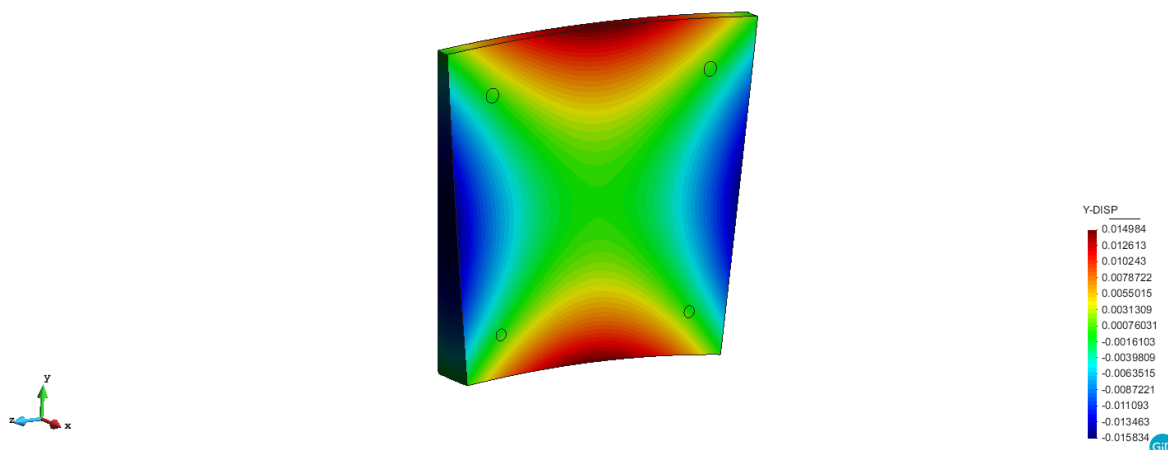


Figura 3.18 Ensayo de flexión pura z , desplazamiento en y (metros).

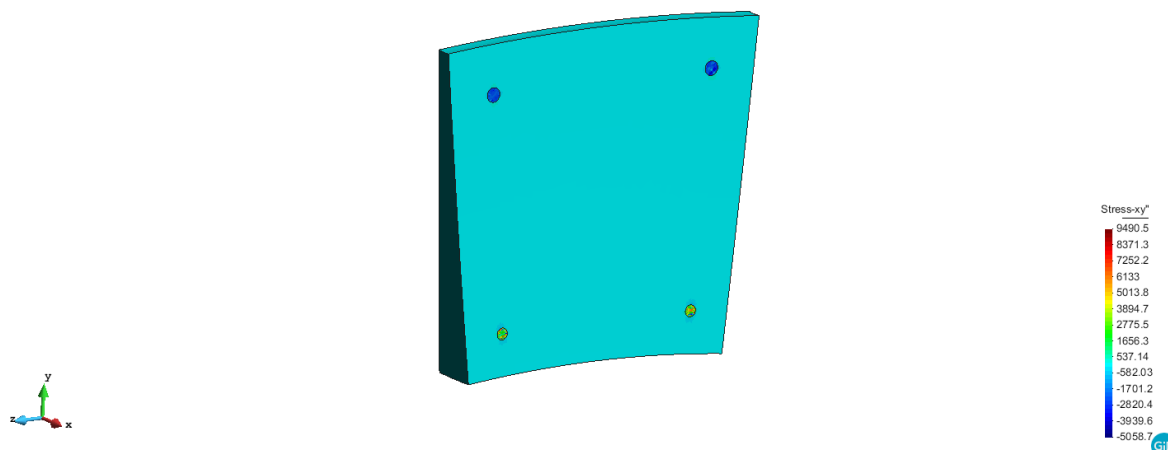


Figura 3.19 Ensayo de flexión pura z , τ_{xy} (Pa).

3.3.6. Ensayo de flexión simple en el eje Z

A fin de realizar este ensayo se debe aplicar un giro de módulo 0.01 radianes alrededor del eje z en la cara 2, mientras la cara 1 se deja libre de condiciones. Sometiendo la sección a estas condiciones, se espera observar el comportamiento de la misma en una flexión simple en el eje z . El modo mostrado en la Figura 3.20 obviamente se parece al de la flexión pura en z , pero de nuevo, se percibe que el valor del módulo de desplazamientos se reduce a la mitad. Se pueden observar grandes esfuerzos de corte en la Figura 3.21, tal y como era de esperar por las características de la flexión simple (9).

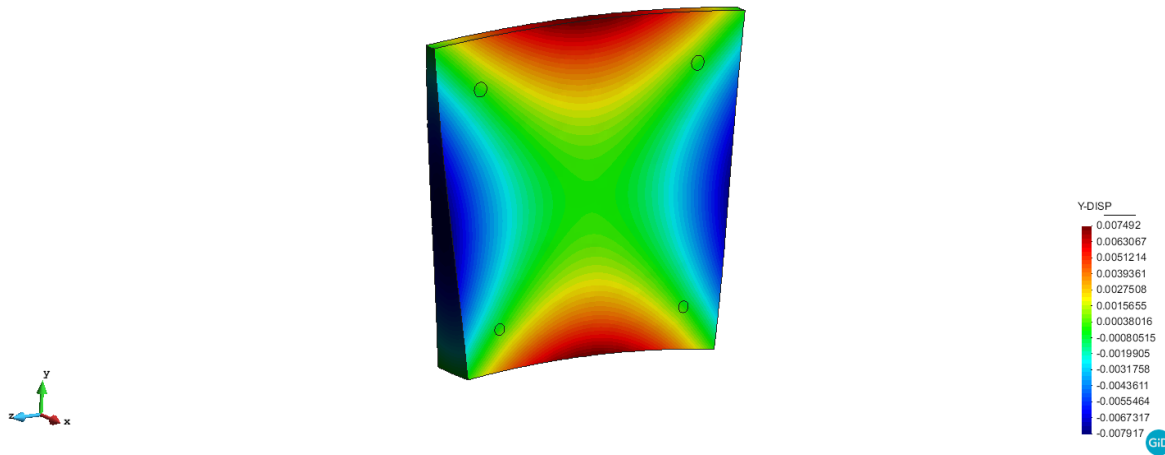


Figura 3.20 Ensayo de flexión simple z , desplazamiento en y (metros).

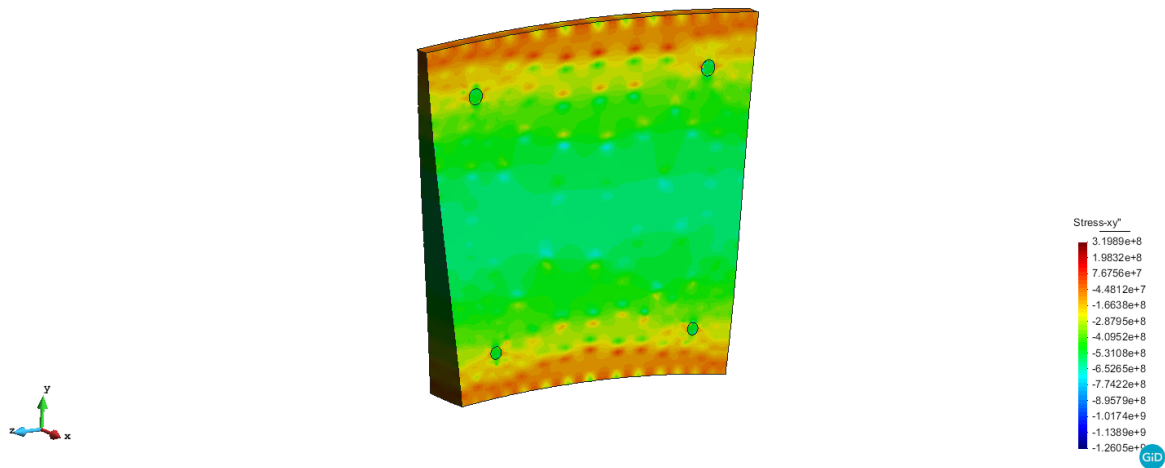


Figura 3.21 Ensayo de flexión simple z , τ_{xy} (Pa).

3.3.7. Resultados del proceso del entrenamiento

El entrenamiento es clave para almacenar los vectores de desplazamiento nodales debido a que cada prueba provoca un comportamiento del dominio único y diferente.

Como las pruebas se ejecutan utilizando condiciones periódicas, no se necesita más que un dominio. Solo se obtiene un patrón de desplazamientos de cada prueba, dando como resultado del entrenamiento básico un conjunto de 6 vectores de desplazamientos nodales que se normalizan a través de la SVD, a fin de obtener 6 modos que se aplicarán para predecir el comportamiento de la estructura de la viga de hormigón armado cuando esta sea sometida a un sistema de fuerzas (9).

Si ahora nos referimos al coste computacional, este es la parte más intensa del método puesto que el problema elastoestático que se resuelve para obtener los desplazamientos se hace como lo haría

cualquier programa de elementos finitos estándar. Por esta razón, el esfuerzo computacional dependerá directamente del refinamiento de la malla elegida. En el caso que nos ocupa, se ha mallado el dominio con 27168 elementos, el tiempo que ha transcurrido para los entrenamientos básicos es de unos 5 minutos y 30 segundos, lo que no es excesivamente largo teniendo en cuenta que la unidad del procesador de la computadora portátil utilizada para el proyecto es un Intel Core i5-6300HQ 2,3 GHz.

A parte de los modos, otra característica que nos proporciona el proceso de aprendizaje es la matriz de rigidez de corte, la cual se obtiene a través de los desplazamientos entre las caras 1 y 2 del dominio.

3.4. Modelo de orden reducido

En este apartado se cubrirán los pasos involucrados en el modelado de orden reducido, así como el funcionamiento de este modelo más simple.

En primera instancia, se debe tener en cuenta que con las características de este modelo es muy fácil alargar o acortar la longitud de la viga, simplemente se debe modificar el número de sucesivas rebanadas. En la sección que nos ocupa, la de 300x300 mm, se quiere realizar una columna de 3 metros de longitud, sabiendo que el grosor de la rebanada es de 30 milímetros, se puede obtener mediante la división de estos dos parámetros que el número de rebanadas necesarias para conformar la columna será de 100.

A continuación, se cargan las bases matriciales que permitirán determinar las variables dentro del espacio de orden reducido. Una vez, la matriz ha sido obtenida y las variables son determinadas dentro este espacio, el problema se convierte en un sistema trivial 1-D pero con $n_{modes} \times (n_{dominians} + 1)$ grados de libertad. Por ejemplo, para el entrenamiento básico se obtienen 6 modos, por tanto, el sistema tiene $(6 \cdot (100 + 1)) = 606$ grados de libertad. En este punto es cuando se puede apreciar los beneficios del modelo de orden reducido porque en este caso, si se quiere resolver el problema original con el método de elementos finito, los grados de libertad se extienden a $(34635 \text{ nodos por rebanada}) \times (100 \text{ rebanadas}) \times (3 \text{ grados de libertad por nodo}) \approx 10.4$ Millones, convirtiéndose en un problema imposible de afrontar para cualquiera que no tenga el equipamiento necesario. O visto de manera equivalente en términos de elementos, la columna estaría formada por $27168 \cdot 100 \approx 2.7$ Millones. Este modelo también cuenta con una optimización a la hora del visualizado de los resultados, este permite definir al gusto del usuario el número de rebanadas que se quieren visualizar en el post-proceso, como se muestra en la Figura 3.23 donde se muestran las 25 con una mayor solicitación, el resto de rebanadas no son procesadas agilizando así la visualización en el post-proceso (9).

Finalmente, se procede como un problema elástico lineal típico (Ecu. 3.2), se ensambla la matriz de rigidez global K , luego las fuerzas y finalmente, se resuelve el sistema invirtiendo la matriz de rigidez de los grados de libertad sin restricciones.

$$Ka = F \quad (\text{Ecu. 3.2})$$

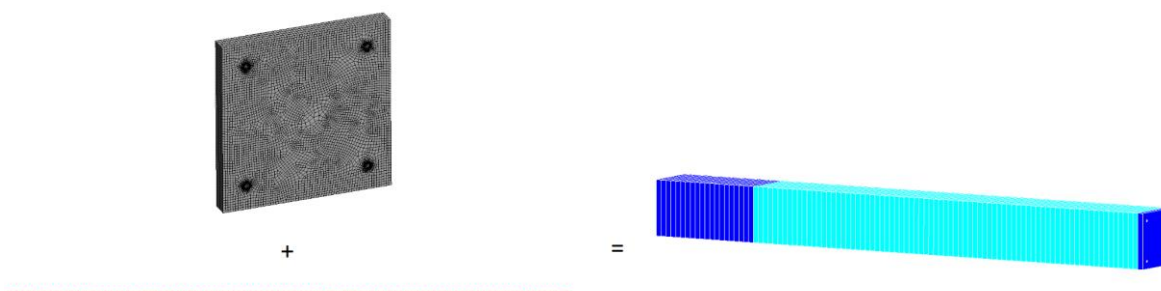


Figura 3.22 Modelo de orden reducido.

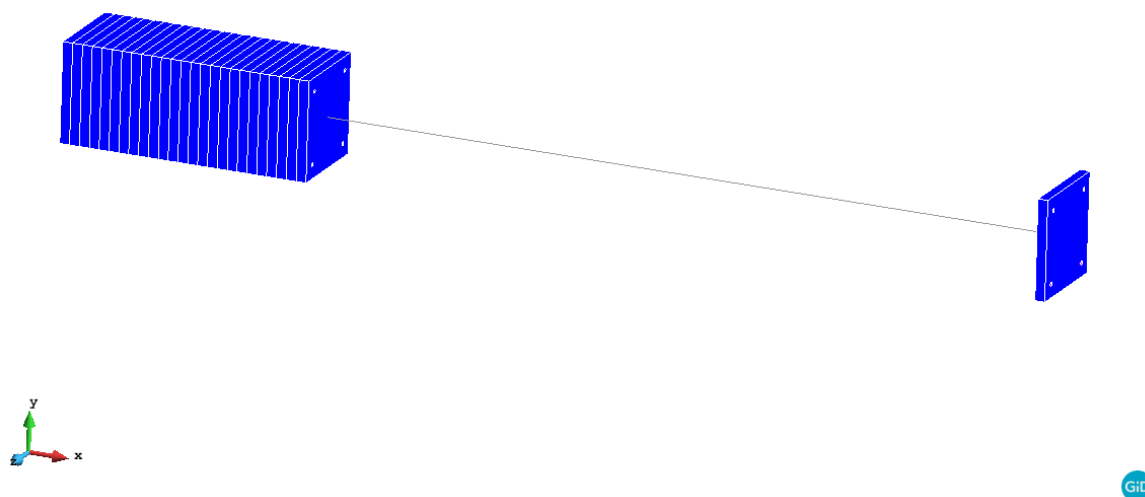


Figura 3.23 Visualización de sólo 25 dominios de los 100 que conforman la viga.

4. Validación

En este apartado de validación se procederá a explicar el procedimiento seguido para realizar el estudio mediante dos métodos: el analítico y el de orden reducido para las columnas de hormigón armado sometidas a compresión, la viga rectangular de hormigón con refuerzo inferior de acero sometida a flexión compuesta y la viga IPN200 con refuerzo superior e inferior de madera sujeta a flexión pura. En el caso de las columnas de hormigón armado solo se presentará, en este apartado, el cálculo para una de ellas, para las otras, estos se adjuntan en el Anexo C.

El objetivo de este apartado es el de verificar con el nuevo método de orden reducido que los resultados obtenidos mediante el cálculo analítico son correctos, es decir, que las teorías desarrolladas para el estudio analítico de vigas compuestas de varios materiales, se cumplen.

4.1. Cálculo analítico

A continuación, se detallarán los pasos a seguir para obtener los desplazamientos y las tensiones utilizando el cálculo analítico, para los distintos casos estudiados.

4.1.1. Columna de hormigón armado sometida a compresión

En el problema se trata una columna de hormigón armado de longitud $l = 3 \text{ m}$ que soporta una carga $P = 1000 \text{ kN}$ en su extremo superior, como se muestra en la Figura 4.1. Respecto a la sección de la columna, esta es cuadrada de lado $a = 300 \text{ mm}$ y está armada con 4 barras de diámetro $d = 12 \text{ mm}$. Los módulos elásticos del hormigón y del acero son respectivamente $E_h = 25 \text{ GPa}$ y $E_a = 200 \text{ GPa}$.

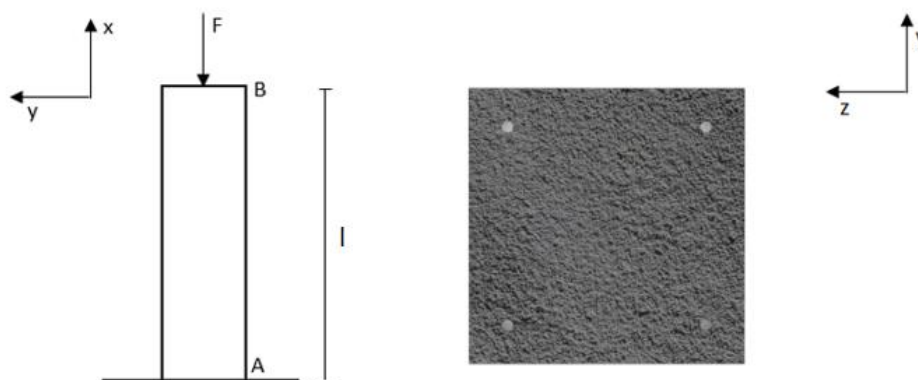


Figura 4.1 Columna de hormigón armado sometida a compresión, sección transversal y condiciones de contorno.

Cálculo de reacciones

Con las cargas indicadas en la Figura 4.1, se puede observar que la viga está sometida a un esfuerzo axial constante. Si se aplica la ecuación de la estática (Ecu. 4.1) en el sistema descrito con anterioridad, se obtiene el siguiente valor de axil:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow N - F = 0 \rightarrow N = F = 10^6 \text{ N} \quad (\text{Ecu. 4.1})$$

Diagrama del esfuerzo axial

El esfuerzo axial se mantiene constante a lo largo de toda la columna de hormigón armado, tal como se muestra en la Figura 4.2.

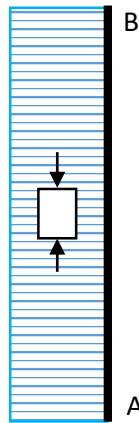


Figura 4.2 Columna de hormigón armado sometida a compresión, diagrama esfuerzo axial.

Características mecánicas de la sección

El primer paso a realizar con el fin de resolver el problema es calcular el área homogenizada de la sección (Ecu. 4.3). Para calcularla, se debe tomar uno de los dos materiales como referencia con el fin de obtener el coeficiente de equivalencia (Ecu. 4.2), en el caso que nos ocupa hemos tomado el hormigón. Esto implica que el módulo de Young homogenizado será el del hormigón, por tanto $\bar{E} = E_h$.

$$n_i = \frac{E_i}{\bar{E}} = \frac{E_a}{E_h} = \frac{200 \text{ GPa}}{25 \text{ GPa}} = 8 \quad (\text{Ecu. 4.2})$$

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A_h + n_a A_a = \left[(300 \text{ mm})^2 - 4 \cdot \pi \cdot \frac{(12 \text{ mm})^2}{4} \right] + \left[8 \cdot \left(4 \cdot \pi \cdot \frac{(12 \text{ mm})^2}{4} \right) \right] \quad (\text{Ecu. 4.3}) \\ &= (300 \text{ mm})^2 + 7 \cdot \left(4 \cdot \pi \cdot \frac{(12 \text{ mm})^2}{4} \right) = 93166.725 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

Tensiones en el acero y el hormigón

A continuación, aplicando las Ecuaciones 4.4 y 4.5 para el hormigón y el acero respectivamente, se obtienen las tensiones en cada uno de ellos.

$$\sigma_h = \frac{P}{\bar{A}} = \frac{-10^6 \text{ N}}{93166.725 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = -10.733 \text{ MPa} \quad (\text{Ecu. 4.4})$$

$$\sigma_a = n_a \frac{P}{\bar{A}} = 8 \cdot \frac{-10^6 \text{ N}}{93166.725 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = -85.867 \text{ MPa} \quad (\text{Ecu. 4.5})$$

Flecha

Finalmente, dado que la deformación es la misma en los dos materiales, se puede calcular la deformación máxima de la columna con la Ecuación 4.6.

$$\Delta l = \frac{N L}{E \bar{A}} = \frac{-10^6 \text{ N} \cdot 3 \text{ m}}{25 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 93166.725 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = -1.288 \text{ mm} \quad (\text{Ecu. 4.6})$$

Los valores de tensiones y deformaciones que se han obtenido serán los que se deben validar con el método de orden reducido.

4.1.2. Viga rectangular con refuerzo de acero sometida a flexión compuesta recta

Este problema consiste en una viga de hormigón biapoyada sometida a las cargas de la Figura 4.3, donde $F_1 = 20 \text{ kN}$ y $F_2 = 100 \text{ kN}$. La sección transversal es rectangular y de dimensiones $b = 120 \text{ mm}$ y $a = 240 \text{ mm}$ y está reforzada en su parte inferior por una placa de acero de espesor $e = 10 \text{ mm}$. La longitud de la viga es $l = 6 \text{ m}$. Los módulos de Young del hormigón y del acero son respectivamente $E_h = 25 \text{ GPa}$ y $E_a = 200 \text{ GPa}$ (5).

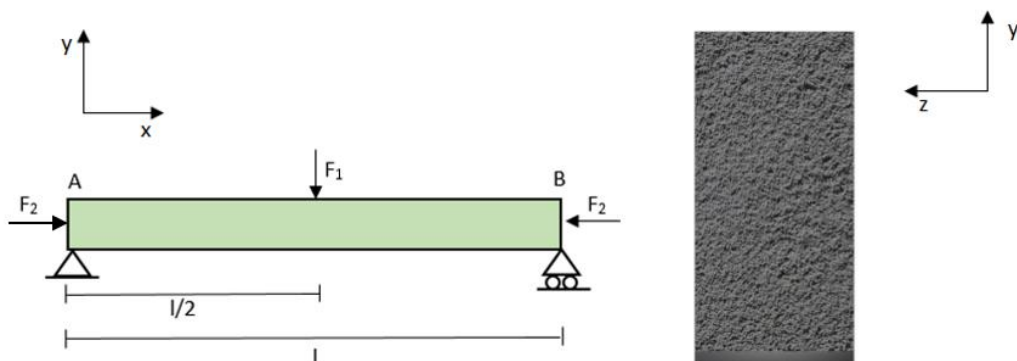


Figura 4.3 Viga de hormigón con refuerzo de acero sometida a flexión compuesta recta, sección transversal y condiciones de contorno.

Cálculo de reacciones

Con las cargas indicadas en la Figura 4.3, se puede observar que la viga está sometida a un esfuerzo axial constante y un momento flector en el eje z. El esfuerzo cortante es constante con una variación de signo en la sección del centro de la luz. Si se aplican las siguientes ecuaciones de la estática se obtienen los siguientes valores de axial, cortante y momento flector:

Axil

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N - F_2 = 0 \rightarrow N = F_2 = 10^5 \text{ N} \quad (\text{Ecu. 4.7})$$

Cortante

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow R_B \cdot l - F_1 \cdot \frac{l}{2} = 0 \rightarrow R_B = 10^4 \text{ N} \quad (\text{Ecu. 4.8})$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow R_A - F_1 + R_B = 0 \rightarrow R_A = F_1 - R_B = 10^4 \text{ N} \quad (\text{Ecu. 4.9})$$

Momento flector

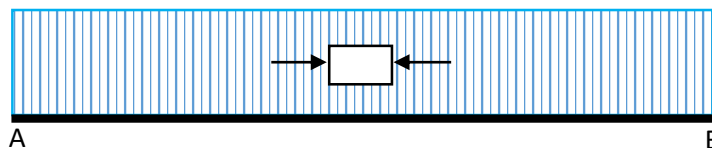
$$\Sigma M_A = -R_B \cdot \frac{x}{2} \quad \text{para } 0 \leq x < \frac{l}{2} \quad (x \text{ en metros}) \quad (\text{Ecu. 4.10})$$

$$\Sigma M_A = F_1 \cdot (x - 3) - R_B \cdot \frac{x}{2} \quad \text{para } \frac{l}{2} \leq x < l \quad (x \text{ en metros}) \quad (\text{Ecu. 4.11})$$

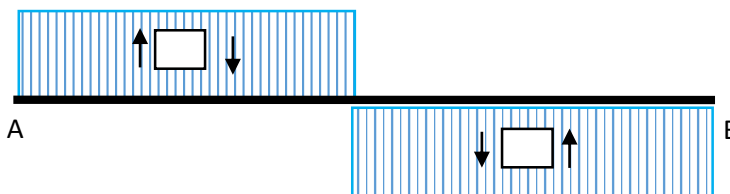
Nota: El valor del momento flector es variable y diferente en cada punto de la longitud de la viga. En consecuencia, no se da un valor sino dos funciones que definen este a lo largo de toda la viga.

Diagramas de esfuerzo

Axil



Cortante



Momento flexor

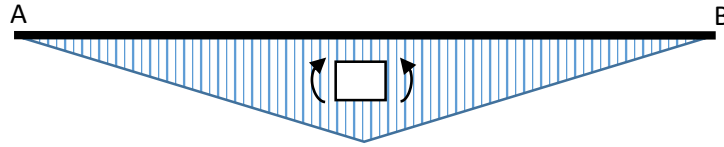


Figura 4.4 Viga de hormigón con refuerzo de acero sometida a flexión compuesta recta, diagramas de esfuerzo.

Características mecánicas de la sección

A fin de calcular el área homogenizada (Ecu 4.13), es necesario encontrar el valor del coeficiente de referencia, para ello, se toma el hormigón como material de referencia ($\bar{E} = E_h$) y se aplica la Ecuación 4.12.

$$n_i = \frac{E_i}{\bar{E}} = \frac{E_a}{E_h} = \frac{200 \text{ GPa}}{25 \text{ GPa}} = 8 \quad (\text{Ecu. 4.12})$$

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A_h + n_a A_a = [120 \text{ mm} \cdot 240 \text{ mm}] + [8 \cdot (120 \text{ mm} \cdot 10 \text{ mm})] \\ &= 38400 \text{ mm}^2 \end{aligned} \quad (\text{Ecu. 4.13})$$

La posición del centro mecánico de la sección respecto el borde inferior (Fig. 4.3) es:

$$\begin{aligned} y_{\bar{G}} &= \frac{\sum A_i \cdot y_i}{A_T} = \frac{120 \text{ mm} \cdot 240 \text{ mm} \cdot 130 \text{ mm} + 8 \cdot (120 \text{ mm} \cdot 10 \text{ mm} \cdot 5 \text{ mm})}{38400 \text{ mm}^2} \\ &= 98.75 \text{ mm} \end{aligned} \quad (\text{Ecu. 4.14})$$

Finalmente, el momento de inercia de la sección homogenizada respecto al eje mecánico \bar{z} es:

$$\begin{aligned} I_{\bar{z}} &= \left[\frac{1}{12} b h^3 + A_h d^2 \right] + n_a [A_a d^2] \\ &= \left[\frac{120 \text{ mm} \cdot (240 \text{ mm})^3}{12} + 120 \text{ mm} \cdot 240 \text{ mm} \cdot (31.25 \text{ mm})^2 \right] \\ &\quad + 8 \cdot \left[\frac{120 \text{ mm} \cdot (10 \text{ mm})^3}{12} + 120 \text{ mm} \cdot 10 \text{ mm} \cdot (93.75 \text{ mm})^2 \right] \\ &= 250820000 \text{ mm}^4 = 25082 \text{ cm}^4 \end{aligned} \quad (\text{Ecu. 4.15})$$

Tensiones en el acero y el hormigón

La sección más solicitada es en la que se produce el momento flector máximo. En el caso que nos ocupa esta es la sección del centro de luz ($x = l/2$), por tanto, en ella se dan las tensiones máximas para el hormigón y el acero, estas se encuentran aplicando las Ecuaciones 4.16 y 4.17. Donde y es la distancia entre el centro mecánico y la zona de la sección en la que se produce la tensión máxima.

$$\sigma_h = \frac{F}{\bar{A}} - \frac{M_z}{I_z} y \quad (\text{Ecu. 4.16})$$

$$\sigma_a = n_a \left[\frac{F}{\bar{A}} - \frac{M_z}{I_z} y \right] \quad (\text{Ecu. 4.17})$$

Para el hormigón la tensión máxima de compresión es:

$$\sigma_h = \frac{-10^5 \text{ N}}{384 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} - \frac{3 \cdot 10^4 \text{ Nm}}{2.5082 \cdot 10^{-4} \text{ m}} (15.125 \cdot 10^{-2} \text{ m}) = -20.695 \text{ MPa}$$

Y para el acero son:

$$\sigma_a = 8 \cdot \left[\frac{-10^5 \text{ N}}{384 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} - \frac{3 \cdot 10^4 \text{ Nm}}{2.5082 \cdot 10^{-4} \text{ m}} (-9.875 \cdot 10^{-2} \text{ m}) \right] = 73.658 \text{ MPa}$$

Los valores de tensiones de compresión y tracción obtenidos, serán los validados utilizando el método de orden reducido.

4.1.3. Viga IPN200 con refuerzos de madera sometida a flexión simple

Este problema consiste en una viga doblemente apoyada de longitud $l = 5\text{ m}$ que soporta una carga uniformemente distribuida $q = 0.5 \text{ kN/m}$. La sección transversal es la de un perfil IPN200 de área $A_a = 33.5 \text{ cm}^2$ y momento de inercia $I_{z-a} = 2140 \text{ cm}^4$, que ha sido reforzada por dos vigas de madera perfectamente unidas a las alas (Figura 4.5). Las vigas de madera tienen una sección transversal de base $b = 90 \text{ mm}$ y altura $a = 50 \text{ mm}$. Los módulos de elasticidad del acero y la madera son respectivamente $E_a = 200 \text{ GPa}$ y $E_m = 10 \text{ GPa}$ (5).

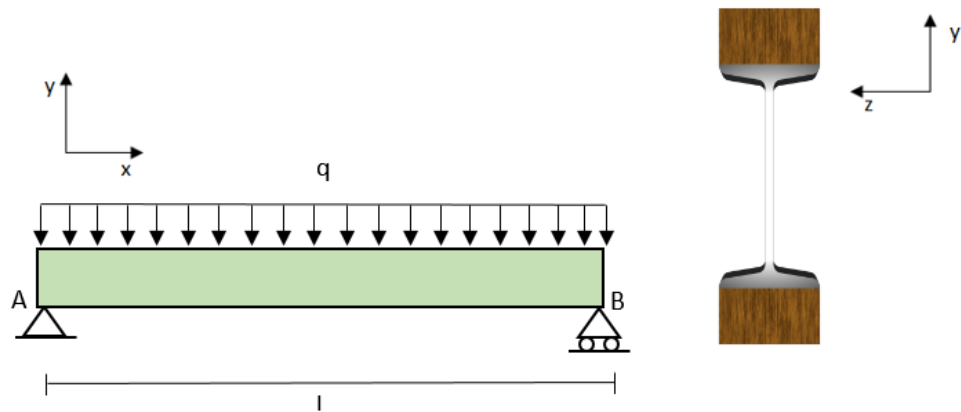


Figura 4.5 Viga de acero IPN200 con dos refuerzos de madera sometida a flexión simple, sección transversal y condiciones de contorno.

Cálculo de reacciones

La viga se encuentra sometida a flexión simple. Por tanto, la distribución de tensiones es lineal. La sección del centro de la luz es la que soporta el momento flector máximo, debido a esto, es la más solicitada y donde se producirán las tensiones máximas. Si se aplican las siguientes ecuaciones de la estática se obtienen los siguientes valores de cortante y del momento flector:

Cortante

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow R_B \cdot l - q \cdot \frac{l^2}{2} = 0 \rightarrow R_B = 1.25 \cdot 10^3 \text{ N} \quad (\text{Ecu. 4.18})$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow R_A - q \cdot l + R_B = 0 \rightarrow R_A = q \cdot l - R_B = 1.25 \cdot 10^3 \text{ N} \quad (\text{Ecu. 4.19})$$

$$V_y = R_B - q \cdot x \quad (x \text{ en metros}) \quad (\text{Ecu. 4.20})$$

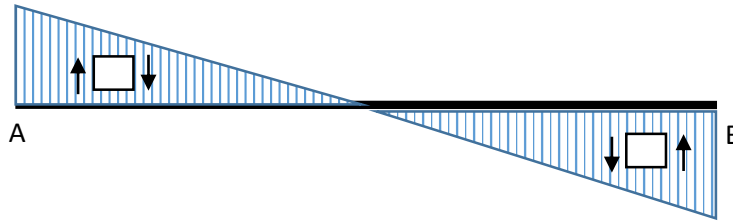
Momento flector

$$\Sigma M_A = -R_B \cdot x + \frac{q \cdot x^2}{2} \quad \text{para } 0 \leq x < l \quad (x \text{ en metros}) \quad (\text{Ecu. 4.21})$$

Nota: El valor de cortante y del momento flector es variable y diferente en cada punto de la longitud de la viga. En consecuencia, no se da un valor sino las funciones que definen estos a lo largo de toda la viga.

Diagramas de esfuerzo

Cortante



Momento flector

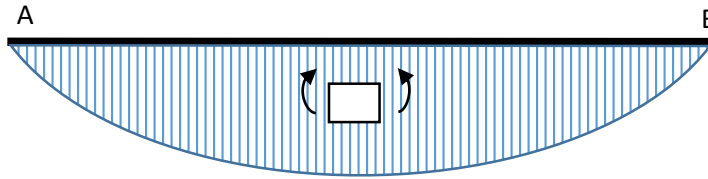


Figura 4.6 Viga de acero IPN200 con dos refuerzos de madera sometida a flexión simple, diagramas de esfuerzo.

Características mecánicas de la sección

La sección es simétrica respecto a los ejes geométricos y y z . Por tanto dichos ejes coinciden con los ejes mecánicos de la sección \bar{y} , \bar{z} . Además, el centro mecánico de la sección \bar{G} coincide con el centro de gravedad G de la sección (Fig. 4.5).

Tomando como material de referencia la madera, se obtiene el coeficiente de equivalencia y a continuación el área homogenizada.

$$n_i = \frac{E_i}{E} = \frac{E_a}{E_h} = \frac{200 \text{ GPa}}{10 \text{ GPa}} = 20 \quad (\text{Ecu. 4.22})$$

$$\bar{A} = A_m + n_a A_a = [2 \cdot (90 \text{ mm} \cdot 50 \text{ mm})] + [20 \cdot 3350 \text{ mm}^2] = 76000 \text{ mm}^2 \quad (\text{Ecu. 4.23})$$

El momento de inercia de la sección es el siguiente:

$$\begin{aligned} I_{\bar{z}} &= 2 \cdot \left[\frac{1}{12} b h^3 + A_h d^2 \right] + n_a I_{z-a} \\ &= 2 \cdot \left[\frac{90 \text{ mm} \cdot (50 \text{ mm})^3}{12} + 90 \text{ mm} \cdot 50 \text{ mm} \cdot (125 \text{ mm})^2 \right] + 20 \\ &\quad \cdot [21400000 \text{ mm}^4] = 570500000 \text{ mm}^4 = 57050 \text{ cm}^4 \end{aligned} \quad (\text{Ecu. 4.24})$$

Tensiones en el acero y la madera

Como se ha comentado con anterioridad, la sección más solicitada es la que se produce el momento flector máximo, en el caso que nos ocupa esta es en el centro de la luz ($x = l/2$). En ella se producen las tensiones máximas para la madera y el acero, estas se calculan con las Ecuaciones 4.25 y 4.26. Donde y es la distancia entre el centro mecánico y la zona de la sección en la que se produce la tensión máxima.

$$\sigma_m = -\frac{M_z}{I_z} y \quad (\text{Ecu. 4.25})$$

$$\sigma_m = n_a \left[-\frac{M_z}{I_z} y \right] \quad (\text{Ecu. 4.26})$$

Para la madera las tensiones máximas de compresión y de tracción son:

$$\sigma_m = -\frac{1.562 \cdot 10^3 \text{ Nm}}{5.705 \cdot 10^{-4} \text{ m}} (15 \cdot 10^{-2} \text{ m}) = -0.411 \text{ MPa}$$

$$\sigma_m = -\frac{1.562 \cdot 10^3 \text{ Nm}}{5.705 \cdot 10^{-4} \text{ m}} (-15 \cdot 10^{-2} \text{ m}) = 0.411 \text{ MPa}$$

Y para el acero son:

$$\sigma_a = 20 \cdot \left[-\frac{1.562 \cdot 10^3 \text{ Nm}}{5.705 \cdot 10^{-4} \text{ m}} (10 \cdot 10^{-2} \text{ m}) \right] = -5.476 \text{ MPa}$$

$$\sigma_a = \left[-\frac{1.562 \cdot 10^3 \text{ Nm}}{5.705 \cdot 10^{-4} \text{ m}} (-10 \cdot 10^{-2} \text{ m}) \right] = 5.476 \text{ MPa}$$

Flecha

Finalmente, para calcular la deformación que se produce a la viga, se debe realizar la segunda integral de la ecuación de la elástica (Ecu. 4.27).

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{M(x)}{\bar{EI}} \quad (\text{Ecu. 4.27})$$

A continuación, se calcula primera integral, con esta se obtendría el giro de la sección.

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{EI} \int (-1250x + 250x^2) dx = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1250x^2}{2} + \frac{250x^3}{3} \right) + C_1 \\ &= \frac{1}{EI} \left(-625x^2 + \frac{250x^3}{3} \right) + C_1\end{aligned}$$

Una vez se ha obtenido la primera integral de la ecuación de la elástica, se debe calcular la segunda, con la que se podrá obtener el valor del desplazamiento.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \int \frac{1}{EI} \left(-625x^2 + \frac{250x^3}{3} \right) + C_1 dx = \frac{1}{EI} \left(-\frac{625x^3}{3} + \frac{250x^4}{12} \right) + C_1x + C_2$$

Ahora es necesario calcular los valores de las constantes C_1 y C_2 , para hacerlo, se estudiarán los desplazamientos en los dos apoyos.

$$v(x = 0) \rightarrow C_2 = 0$$

$$\begin{aligned}v(x = 5) \rightarrow -C_1x &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{625x^3}{3} + \frac{250x^4}{12} \right) \rightarrow -C_1(5 \text{ m}) \\ &= \frac{1}{10 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 5.705 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4} \left(\frac{-625 \text{ N} \cdot (5 \text{ m})^3}{3} + \frac{250 \text{ N} \cdot (5 \text{ m})^4}{12} \right) \rightarrow C_1 \\ &= 4.564709 \cdot 10^{-4}\end{aligned}$$

Finalmente, sabiendo los valores de las constantes C_1 y C_2 , y que la deformación máxima se da en el centro de la sección, es decir, $l/2$. Es posible calcular el valor del desplazamiento máximo.

$$\begin{aligned}v(x = 2.5) &= \frac{1}{10 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 5.705 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4} \left(\frac{-625 \text{ N} (2.5 \text{ m})^3}{3} + \frac{250 \text{ N} (2.5 \text{ m})^4}{12} \right) + 4.564709 \\ &\quad \cdot 10^{-4} (2.5 \text{ m}) + 0 = 0.713 \text{ mm}\end{aligned}$$

El valor del desplazamiento máximo y el de las tensiones de compresión y tracción obtenidos para ambos materiales, serán los validados utilizando el método de orden reducido.

4.2. Cálculo mediante Reducción Dimensional

En esta sección se realizará el estudio mediante Reducción Dimensional de los problemas antes presentados en el cálculo analítico, a fin de analizar los resultados a nivel ingenieril. Además, se presentarán las herramientas de post-proceso utilizadas para la visualización de los resultados.

4.2.1. Herramientas de post-proceso

La visualización de los resultados de una manera adecuada facilita la interpretación de los mismos y forma una parte muy importante en la ingeniería. Por este motivo el programa GiD tiene implementadas herramientas de post-procesamiento para mejorar la comprensión de las simulaciones que se llevan a cabo (9).

En primera instancia, GiD tiene implementado una herramienta de visualización que pinta la viga de distintos colores dependiendo del valor que tome en cada zona la deformación, la tensión, el momento flector, el cortante, etc. Para saber qué vinculación tienen los colores con los valores, a mano derecha de la pantalla de post-procesado aparece una leyenda que los relaciona. GiD también puede simular, de forma exagerada, la deformada de la viga cuando se le somete al sistema de cargas. En la Figura 4.7 muestra el mapa de colores, la leyenda y la deformada para la viga IPN200 con dos refuerzos de madera.

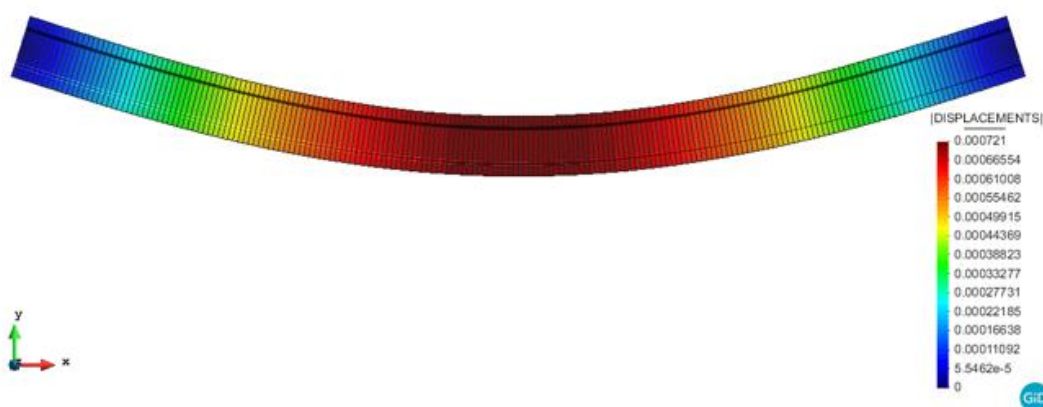


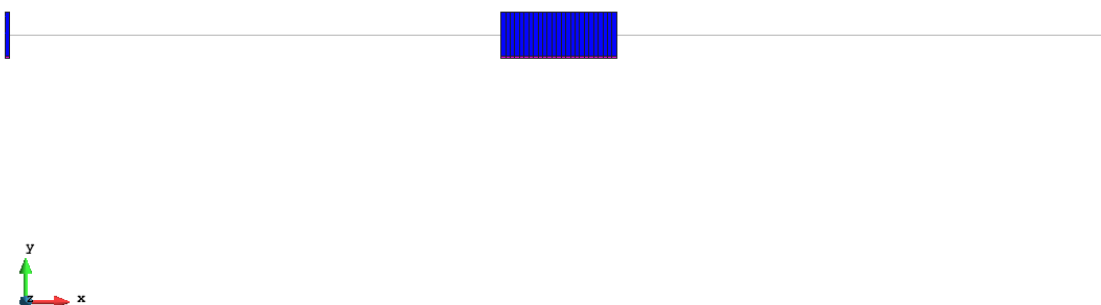
Figura 4.7 Mapa de colores, leyenda y deformada para la viga IPN200 con dos refuerzos de madera.

Otra herramienta computacional de post-procesado que nos proporciona GiD es la visualización de los diagramas de esfuerzo sobre la malla 1D, esta nos permite ver los momentos flectores, las fuerzas de cizalla y axil, e incluso los criterios de rendimiento de Von Mises para cada sección. Un ejemplo de las múltiples posibilidades que existen, se muestra en la Figura 4.8, donde se presenta la visualización del momento flector en el eje z para la viga rectangular con refuerzo de acero sometida a flexión compuesta recta.



Figura 4.8 Momento en el eje z de la viga rectangular con refuerzo de acero sometida a flexión compuesta.

Además, para agilizar el post-procesado el programa Matlab presenta la posibilidad de que el usuario escoja los dominios que quiere que se impriman en 3D. Esta condición, también puede ser cedida al programa que seleccionará las secciones más solicitadas según el criterio de rendimiento de Von Mises. Por ejemplo, si se quiere que muestre las 25 secciones más solicitadas en el caso de la viga rectangular con refuerzo de acero sometida a flexión simple, mostrará las 25 secciones centrales que son las más solicitadas y las que se encuentran en el extremo, estas últimas las muestra por definición. Esta posibilidad que proporciona el programa GiD ha sido utilizada en el presente estudio para la visualización de los resultados.



GiD

Figura 4.9 25 Secciones más solicitadas de la viga rectangular con refuerzo de acero sometida a flexión compuesta.

4.2.2. Resultados obtenidos

4.2.2.1. Columna de hormigón armado sometida a compresión

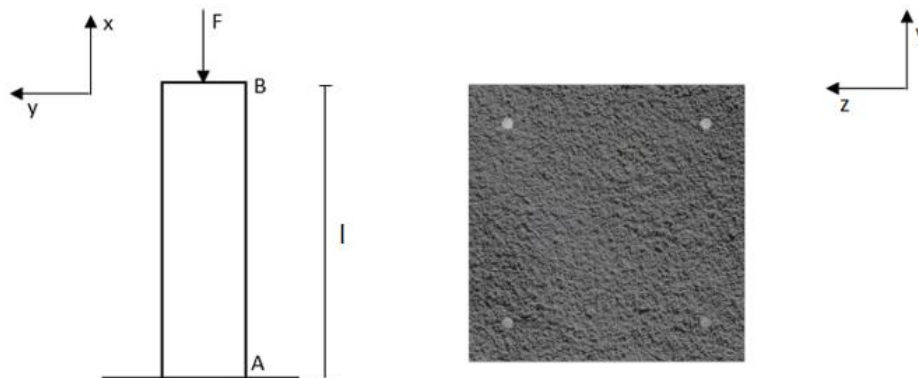


Figura 4.10 Columna de hormigón armado sometida a compresión, sección transversal y condiciones de contorno.

Datos del problema:

$$L = 3 \text{ m}$$

$$a = 300 \text{ mm}$$

$$P = 100 \text{ kN}$$

$$E_h = 25 \text{ GPa}$$

$$d = 12 \text{ mm}$$

$$E_a = 200 \text{ GPa}$$

Utilizando los datos presentados del problema, este se ha resuelto con el método de orden reducido y visualizado los resultados obtenidos mediante las herramientas de post-procesamiento que proporciona el programa comercial GiD. La sección seleccionada para comparar con los resultados analíticos, ha sido sobre la que se producen las tensiones máximas y desplazamientos máximos, es decir, la que se encuentra lo más a la derecha de la imagen. Es posible escoger esta sección debido a que la aplicación de la fuerza en el algoritmo del método de orden reducido no es de forma puntual, sino que es una fuerza distribuida a lo largo de una superficie, en el caso que nos ocupa en la transversal de la columna.

Diagrama del esfuerzo axial

En la Figura 4.11 se muestra el diagrama de esfuerzo axial a lo largo de toda la luz. Cómo se puede observar en la imagen, este es de valor constante, corroborando así el diagrama del estudio analítico.



Figura 4.11 Columna de hormigón armado sometida a compresión, diagrama esfuerzo axial.

Tensiones en el acero y el hormigón

A fin de obtener el valor de las tensiones del acero y el hormigón, el post-proceso del programa GiD muestra coloreada la distribución de tensiones y una leyenda al lado derecho, como se puede observar en la Figura 4.12. Tal y como indica la teoría de vigas compuestas de varios materiales, el máximo de las tensiones se producirá en el acero, mientras que el mínimo será la tensión que se produce en el hormigón, sabiendo esto se puede concluir que la tensión axial que sufrirá el acero será de -86.378 MPa y la del hormigón será de -10.722 MPa .

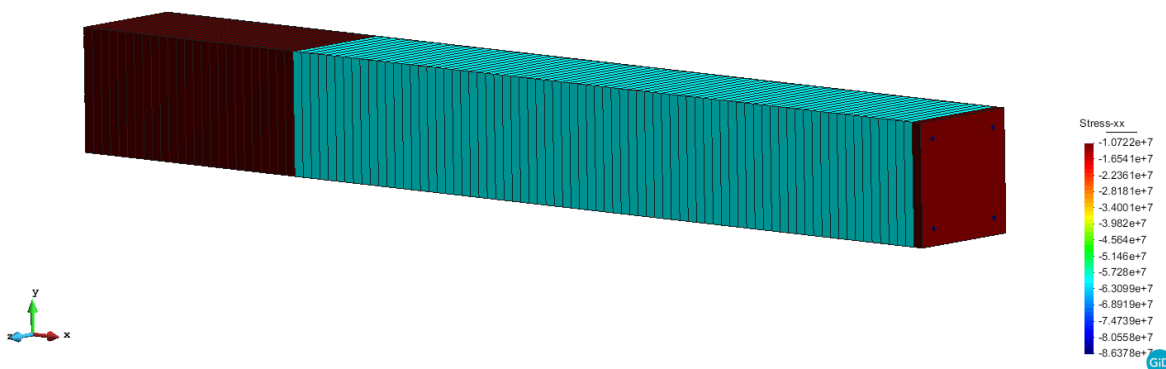


Figura 4.12 Columna de hormigón armado sometida a compresión, Tensión axial σ_{xx} (Pa).

Flecha

Igual que en las tensiones, para los desplazamientos, GiD muestra coloreada la distribución de los mismos y una leyenda a la derecha de la imagen donde se puede observar distintos valores de desplazamiento que se producen a lo largo de toda la viga. En el caso que nos ocupa es de interés el valor del desplazamiento máximo que se encuentra coloreado de azul y que su valor es de $-1,288 \text{ mm}$.

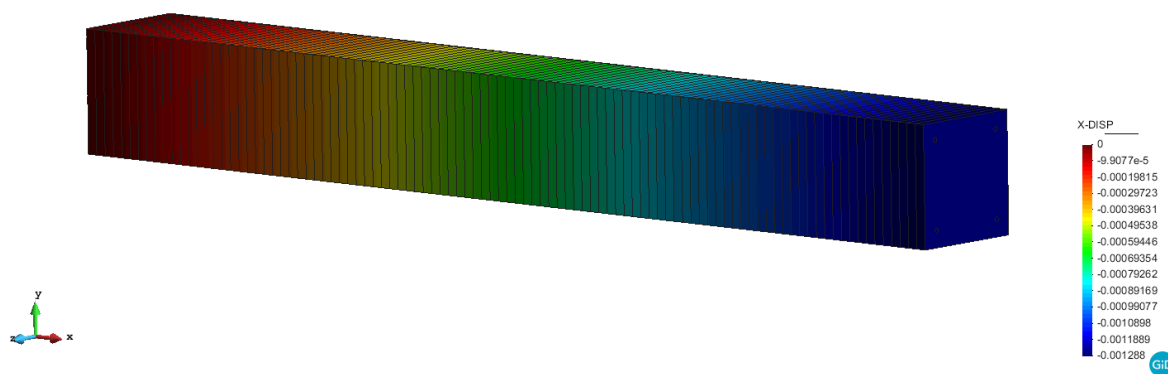


Figura 4.13 Columna de hormigón armado sometida a compresión, deformación axial (metros).

4.2.2.2. Viga rectangular con refuerzo de acero sometida a flexión compuesta recta

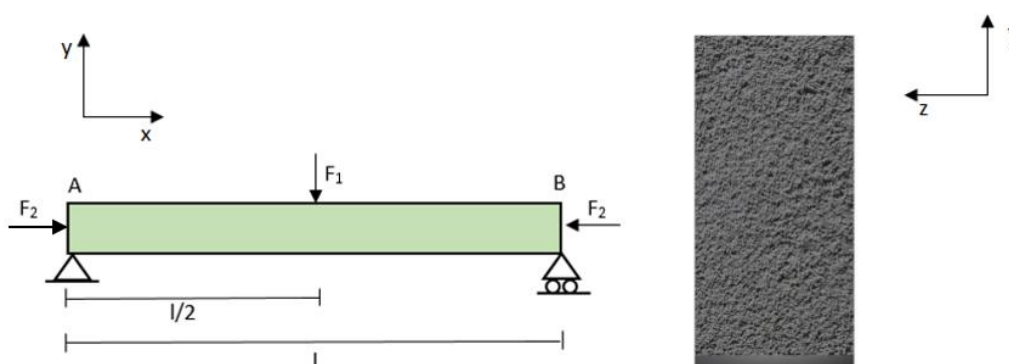


Figura 4.14 Viga de hormigón con refuerzo de acero sometida a flexión compuesta recta, sección transversal y condiciones de contorno.

Datos del problema:

$$l = 6 \text{ m}$$

$$a = 240 \text{ mm}$$

$$F_1 = 20 \text{ kN}$$

$$e = 10 \text{ mm}$$

$$F_2 = 100 \text{ kN}$$

$$E_h = 25 \text{ GPa}$$

$$b = 120 \text{ mm}$$

$$E_a = 200 \text{ GPa}$$

Utilizando los datos presentados del problema, este se ha resuelto con el método de orden reducido y visualizado los resultados obtenidos mediante las herramientas de post-procesamiento que proporciona el programa comercial GiD. La sección seleccionada para comparar con los resultados analíticos, ha sido sobre la que se producen las tensiones máximas y desplazamientos máximos, en este caso se encuentra en el centro de la viga.

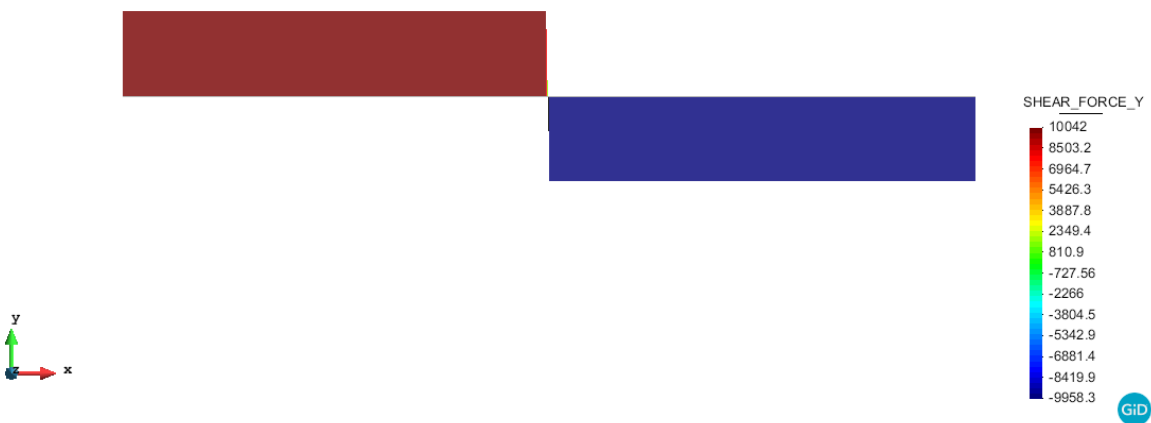
Diagramas de esfuerzo

En la Figura 4.15 se muestra el diagrama del esfuerzo axil, cortante y momento flector. El axil es constante a lo largo de toda la viga y de magnitud 10^5 N . El cortante es positivo a la izquierda del centro de la viga y negativo a la derecha, estos deberían tener el mismo módulo de magnitud (10^4 N) pero debido a la construcción de la viga a través de dominios, este sufre una pequeña desviación de ambos valores. Finalmente, el momento flector en los extremos es nulo y el máximo se produce en el centro de la viga. Los diagramas obtenidos corroboran los obtenidos en el cálculo analítico.

Axil



Cortante



Momento flector

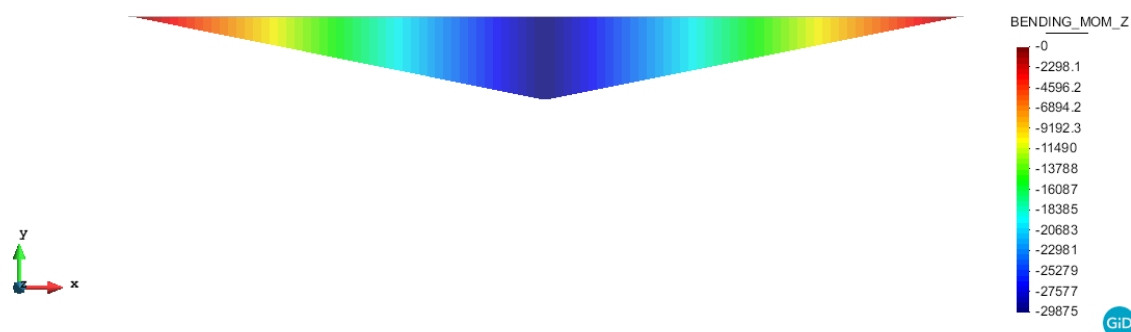


Figura 4.15 Viga de hormigón con refuerzo de acero sometida a flexión compuesta recta, diagramas de esfuerzo.

Tensiones en el acero y el hormigón

Con el objetivo de obtener el valor de las tensiones de acero y del hormigón, se acude al post-proceso de GiD que muestra coloreada la distribución de tensiones y una leyenda a mano derecha, tal y como se observa en las Figuras 4.16 y 4.17. El máximo de la tensión se produce en la zona que se encuentra pintada de color rojo y que pertenece al acero, tomando un valor de 80.604 MPa. Mientras que el máximo de compresión, que se pinta de color azul, se encuentra en la zona perteneciente al hormigón y es de -22.649 MPa.

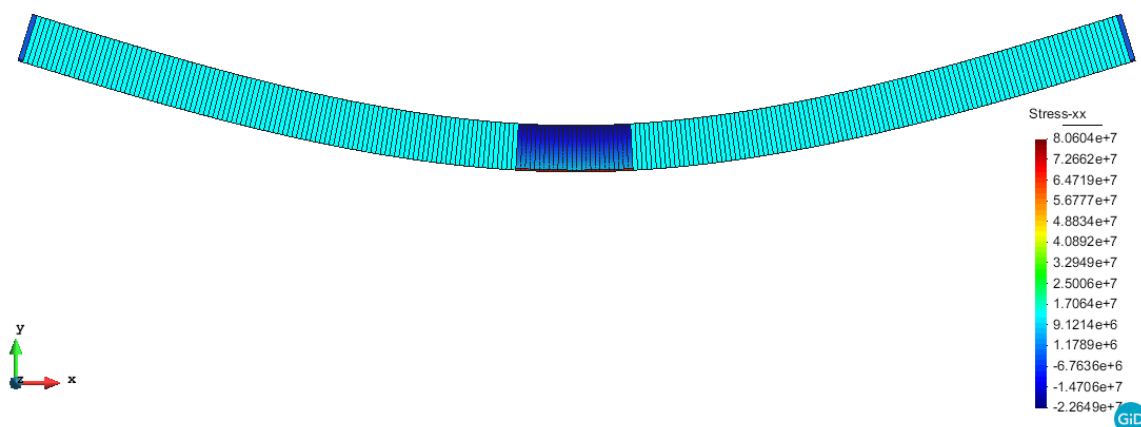


Figura 4.16 Viga de hormigón con refuerzo de acero sometida a flexión compuesta recta, tensión axial σ_{xx} (Pa).

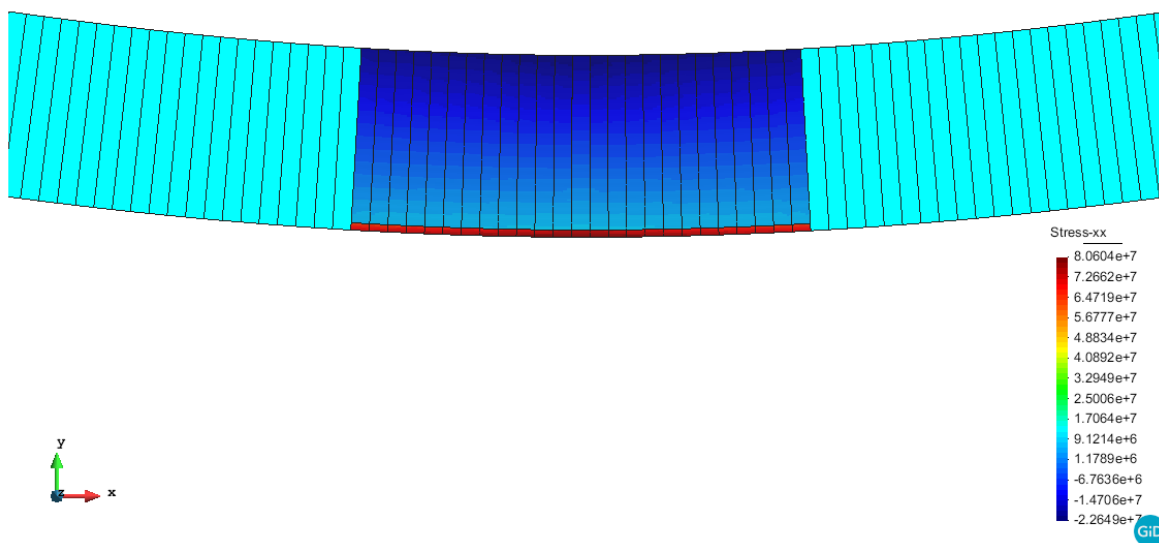


Figura 4.17 Ampliación de la zona de tensiones máximas de la viga de hormigón con refuerzo de acero sometida a flexión compuesta recta, Tensión axial σ_{xx} (Pa).

4.2.2.3. Viga IPN200 con refuerzos de madera sometida a flexión simple

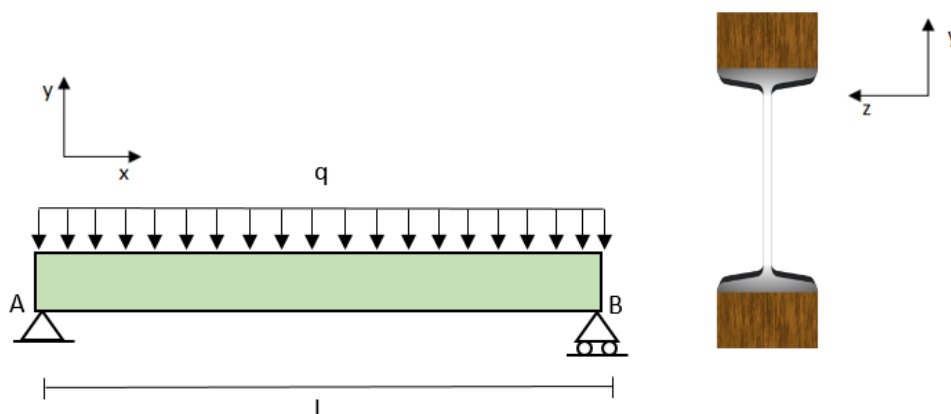


Figura 4.18 Viga de acero IPN200 con dos refuerzos de madera sometida a flexión simple, sección transversal y condiciones de contorno.

Datos del problema:

$$l = 5 \text{ m}$$

$$b = 90 \text{ mm}$$

$$q = 0.5 \text{ kN/m}$$

$$a = 50 \text{ mm}$$

$$A_a = 33.5 \text{ cm}^2$$

$$E_m = 10 \text{ GPa}$$

$$I_{za} = 2140 \text{ cm}^4$$

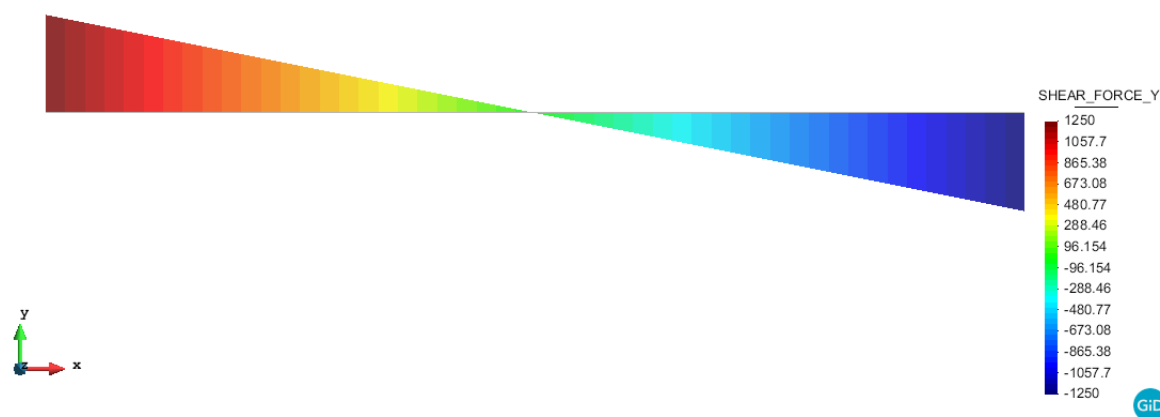
$$E_a = 200 \text{ GPa}$$

Utilizando los datos presentados del problema, este se ha resuelto con el método de orden reducido y visualizado los resultados obtenidos mediante las herramientas de post-procesamiento que proporciona el programa comercial GiD. La sección seleccionada para comparar con los resultados analíticos, igual que con anterioridad, ha sido sobre la que se producen las tensiones máximas y desplazamientos máximos, esta se encuentra en el centro de la viga.

Diagramas de esfuerzo

En la Figura 4.19 se muestra el diagrama del cortante y del momento flector. El cortante es máximo en los extremos, en ambos tiene el mismo módulo, pero el signo es contrario, mientras que en el centro de la viga este es cero. Respecto al momento flector, este tiene una distribución parabólica que es característica de las cargas distribuidas, en los extremos su valor es cero y el máximo se produce en el centro de la luz. Estos diagramas corroboran los obtenidos en el cálculo analítico.

Cortante



Momento flector

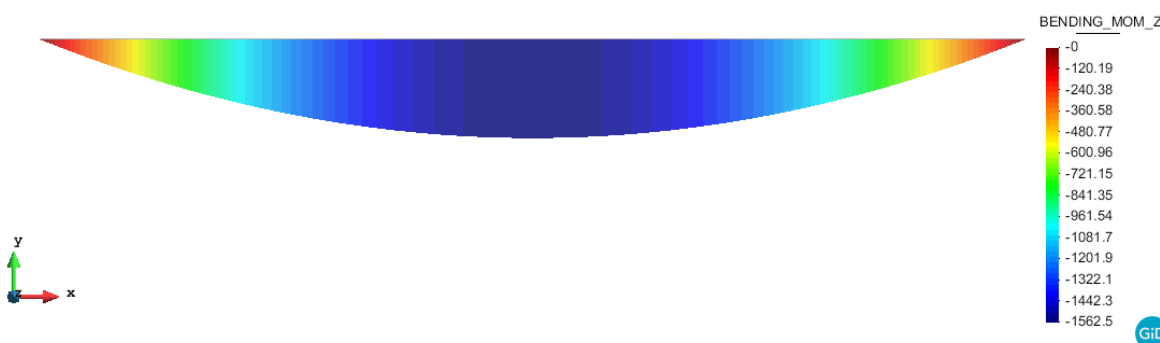


Figura 4.19 Viga de acero IPN200 con dos refuerzos de madera sometida a flexión simple, diagramas de esfuerzo.

Tensiones en el acero y el hormigón

Con el objetivo de obtener el valor de las tensiones de acero y del hormigón, se acude al post-proceso de GiD que muestra coloreada la distribución de tensiones y una leyenda a mano derecha, tal y como se observa en las Figuras 4.20 y 4.21. El máximo de las tensiones a tracción y a compresión se encuentran en el acero, si nos remitimos a la teoría de vigas compuestas de varios materiales, los máximos de las tensiones, en valor absoluto, siempre se producen en el material con un mayor módulo de elasticidad, estos para el acero son 5.446 MPa a tracción y -5.437 MPa a compresión. Para la madera los valores máximos de tracción y compresión son respectivamente, 0.423 MPa y -0.414 MPa .

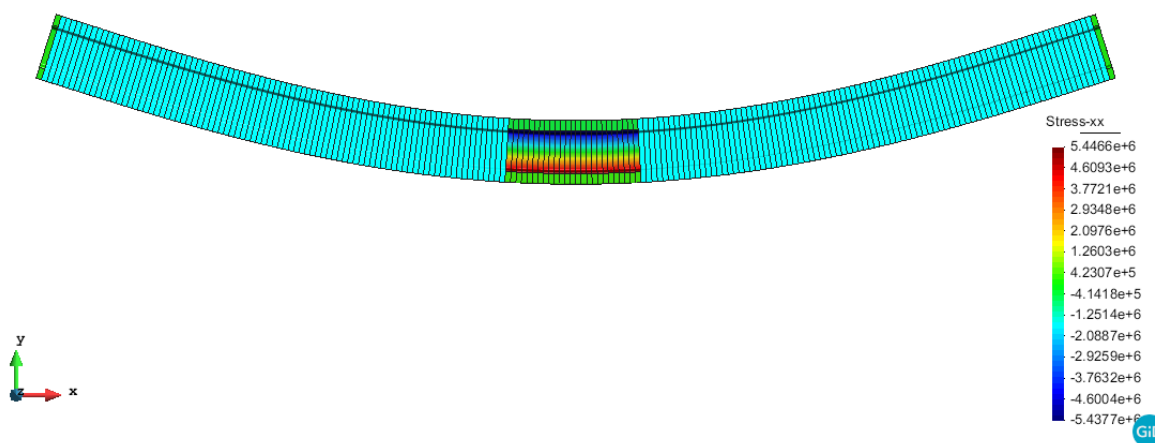


Figura 4.20 Viga de acero IPN200 con dos refuerzos de madera sometida a flexión simple, tensión axial σ_{xx} (Pa).

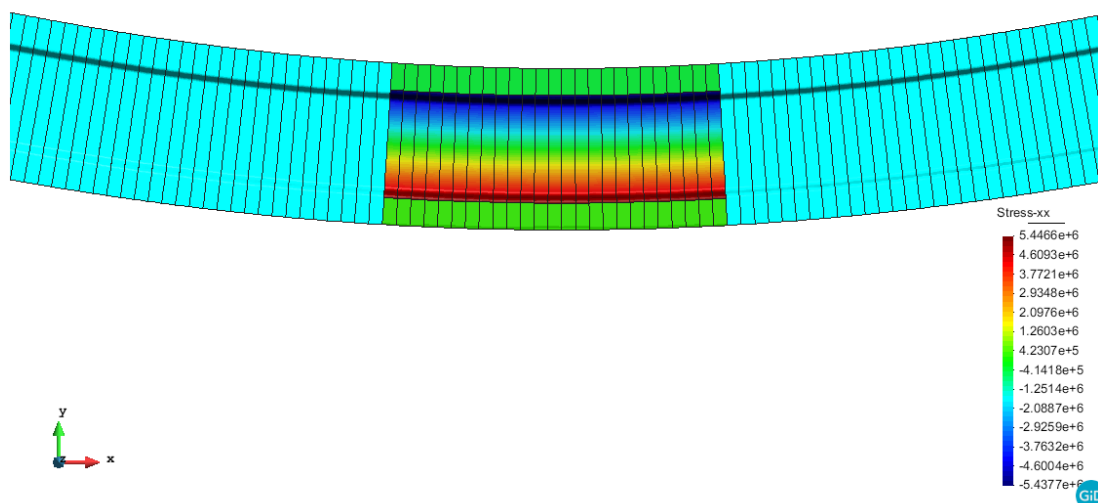


Figura 4.21 Ampliación de la zona de tensiones máximas de la viga de acero IPN200 con dos refuerzos de madera sometida a flexión simple, tensión axial σ_{xx} (Pa).

Flecha

Igual que en las tensiones, para los desplazamientos, GiD muestra coloreada la distribución de los mismos y una leyenda a la derecha de la imagen donde se puede observar distintos valores de desplazamiento que se producen a lo largo de toda la viga. Es de interés el valor del desplazamiento máximo que se encuentra coloreado de color rojo y su valor es de 0.721 mm.

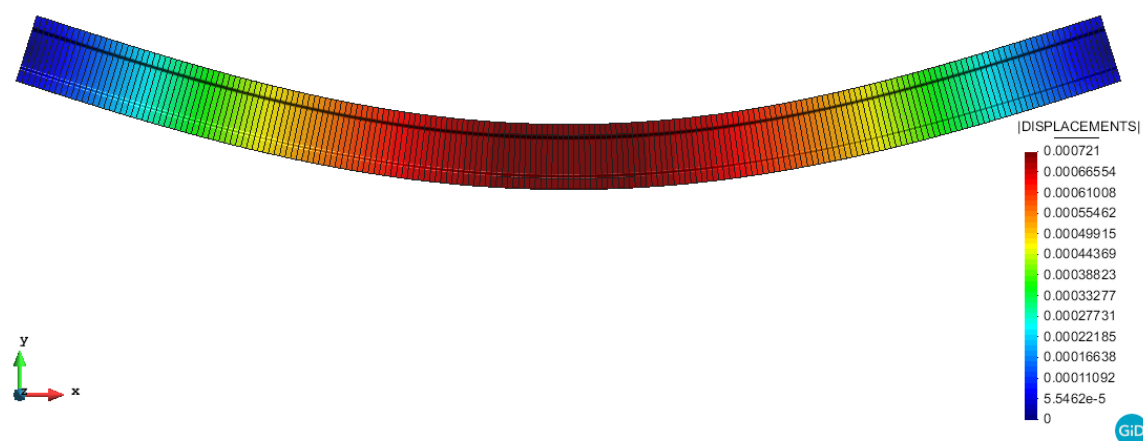


Figura 4.22 Viga de acero IPN200 con dos refuerzos de madera sometida a flexión simple, deformación (metros).



5. Análisis de resultados

A continuación, se compararán los resultados obtenidos mediante el cálculo analítico y reducción dimensional. Con el fin de observar si existe una semejanza entre ellos y posteriormente extraer conclusiones sobre los mismos.

5.1. Columnas de hormigón armado sometidas a compresión

5.1.1. Perfil rectangular de 300x300 mm

Método	Tensión en el hormigón (MPa)	Tensión en el acero (MPa)	Desplazamiento (mm)
Cálculo analítico	-10.733	-85.867	-1.288
Reducción dimensional	-10.722	-86.378	-1.288
Error en %	0.102	0.591	0

Tabla 5.1 Comparativa de resultados para el perfil rectangular de 300x300 mm.

5.1.2. Perfil rectangular de 350x250 mm

Método	Tensión en el hormigón (MPa)	Tensión en el acero (MPa)	Desplazamiento (mm)
Cálculo analítico	-10.657	-85.257	-1.279
Reducción dimensional	-10.639	-85.785	-1.279
Error en %	0.169	0.615	0

Tabla 5.2 Comparativa de resultados para el perfil rectangular de 350x250 mm.

5.1.3. Perfil rectangular de 400x400mm

Método	Tensión en el hormigón (MPa)	Tensión en el acero (MPa)	Desplazamiento (mm)
Cálculo analítico	-5.733	-45.864	-0.688
Reducción dimensional	-5.718	-46.148	-0.688
Error en %	0.262	0.615	0

Tabla 5.3 Comparativa de resultados para el perfil rectangular de 400x400 mm.

5.1.4. Perfil circular de diámetro 300 mm

Método	Tensión en el hormigón (MPa)	Tensión en el acero (MPa)	Desplazamiento (mm)
Cálculo analítico	-13.256	-106.050	-1.591
Reducción dimensional	-13.199	-106.720	-1.591
Error en %	0.432	0.628	0

Tabla 5.4 Comparativa de resultados para el perfil circular de diámetro 300 mm.

5.1.5. Perfil circular de diámetro 400 mm

Método	Tensión en el hormigón (MPa)	Tensión en el acero (MPa)	Desplazamiento (mm)
Cálculo analítico	-7.138	-57.106	-0.856
Reducción dimensional	-7.104	-57.464	-0.856
Error en %	0.478	0.622	0

Tabla 5.5 Comparativa de resultados para el perfil circular de diámetro 400 mm.

En las tablas anteriores se puede observar que el error, es decir, la diferencia entre los resultados obtenidos a través de cálculo analítico y los de reducción dimensional, se encuentra alrededor del 0.5 % en el caso de las tensiones y 0 % en los desplazamientos.

5.2. Viga sometida a flexión compuesta recta

5.2.1. Perfil rectangular con refuerzo de acero

Método	Tensión en el hormigón (MPa)	Tensión en el acero (MPa)
Cálculo analítico	-20.695	73.658
Reducción dimensional	-22.649	80.604
Error en %	8.627	8.617

Tabla 5.6 Comparativa de resultados para el perfil rectangular con refuerzo de acero.

En este caso los errores que se han obtenido al comparar los resultados de las tensiones calculados mediante el cálculo analítico y la reducción dimensional son de alrededor un 8,6 %. Este es el error más grande obtenido en los distintos estudios y es debido a que las teorías convencionales que se utilizan en el cálculo analítico no tienen en cuenta la contribución en las tensiones de la deformación producida debido a que la sección es asimétrica.

5.3. Viga sometida a flexión simple

5.3.1. Perfil IPN200 con refuerzos de madera

Método	Tensión en el hormigón a compresión (MPa)	Tensión en el hormigón a tracción (MPa)	Tensión en el acero a compresión (MPa)	Tensión en el acero a tracción (MPa)	Desplazamiento (mm)
Cálculo analítico	-0.414	-0.423	-5.437	5.446	0.721
Reducción dimensional	-0.411	0.411	-5.476	-5.476	0.731
Error en %	0.730	2.920	0.712	0.548	1.368

Tabla 5.7 Comparativa de resultados para el perfil IPN200 con refuerzos de madera.

Como se puede observar en la tabla, en este caso los errores que se obtienen al comparar los cálculos analíticos y los de reducción dimensional son de alrededor un 0.7 % en el caso de las tensiones de compresión tanto para el acero como para el hormigón, de un 2.9 % y un 0.5 % para las tensiones de tracción del hormigón y del acero, respectivamente, y un 1.3 % para el desplazamiento.

Análisis del impacto medioambiental

Los seres humanos debemos cuidar del planeta Tierra, es dónde vivimos, quien nos proporciona las condiciones necesarias para nuestra existencia y recursos que han hecho desarrollar nuestra civilización hasta el día de hoy. Por tanto, es de justicia que cuando desarrollemos cualquier proyecto, realicemos un estudio sobre como este puede afectar el medioambiente y si aparece cualquier perjuicio sobre el mismo, lo intentemos solucionar, a fin de preservar todo lo que nos rodea.

Este proyecto se ha desarrollado entero en ordenador, tanto los cálculos analíticos y simulaciones para el cálculo de reducción dimensional como el redactado del mismo. También se debe tener en cuenta que se ha desarrollado en una zona de trabajo, que ha sido necesaria climatizar e iluminar de forma adecuada dependiendo del día y la hora en la que se trabajaba. En consecuencia, el recurso que se ha utilizado en mayor medida ha sido la electricidad.

La electricidad utilizada puede provenir de energías renovables, no renovables o de la combinación de ambas. Pero todas estas energías tienen un impacto sobre el medioambiente. En el caso de las no renovables como son: el petróleo, gas natural, carbón y la energía nuclear, que son procesadas en sus pertinentes centrales a fin de obtener energía eléctrica, son altamente contaminantes ya que durante su procesamiento se emite a la atmósfera dióxido de carbono (CO_2), óxidos nítricos (NO_x), hidrocarburos (HC), etc. Incluso, en el caso de la energía nuclear, se tiene como residuo material radioactivo que es altamente contaminante y de gran peligrosidad para los seres vivos. En cuanto a las renovables, como son: la solar, la eólica, hidroeléctrica, mareomotriz, etc. Estas no emiten ningún tipo de gas contaminante ni tampoco material nuclear, pero su instalación se ve reducida a espacios con características concretas, tanto meteorológicas como del terreno. Por ejemplo, pueden ser necesarias unas determinadas horas de sol al año, para la energía solar, una cierta cantidad de viento que tenga una velocidad moderada y que sea lo más constante posible, para la eólica, o un valle inundable para la hidroeléctrica. Además, la utilización de estas energías tiene un gran impacto visual y sobre el ecosistema en el que se introducen, que puede incluso acabar con el mismo. Aunque las energías renovables tienen también sus inconvenientes son mucho menos agresivos con el medioambiente que las no renovables, por tanto, siempre se preferirá su utilización a la hora de producir la electricidad que se consume.

Realizar todo el trabajo en ordenador nos ha permitido evitar la utilización de papel. Esto es de gran importancia, porque el ahorro de este material ayuda a la preservación de la flora de los bosques y a su vez de la fauna.

Finalmente, otro punto favorable de este proyecto, es el coste de la maquinaria computacional utilizada. El cálculo a través del método de orden reducido permite que la computadora utilizada tenga

unas características muy inferiores a las requeridas hasta el momento, permitiendo un ahorro en la producción e instalación de recursos tecnológicos.

Conclusiones

Este proyecto, se centra en la utilización de un nuevo método que se encuentra actualmente en desarrollo y que está basado en la técnica de reducción dimensional a fin de reducir la complejidad de un problema de computación de alta dimensión. Esto se consigue a través del modelado de orden reducido y la descomposición del dominio utilizando un algoritmo de aprendizaje basado en la SVD y aplicado a unas estructuras típicas de ingeniería estructural.

Si ahora nos fijamos en el apartado de análisis de resultados, podemos observar que, en los tres tipos de casos analizados mediante el cálculo analítico y el de reducción dimensional, la semejanza entre ellos es considerable, tal y como demuestra el error obtenido en su comparación. Por tanto, es posible concluir que las teorías y aproximaciones utilizadas en el cálculo analítico, para estructuras compuestas de varios materiales, se amoldan a la realidad, simulando así un comportamiento de la estructura muy parecido al real.

Una vez se han verificado que las teorías del cálculo de vigas compuestas de varios materiales son modelos cercanos a la realidad, podemos enfocar el método de reducción dimensional desarrollado por el Dr. Joaquín A. Hernández Ortega en un ámbito tanto académico como empresarial. Este nuevo método realiza el cálculo de complejas estructuras de materiales compuestos obteniendo resultados más precisos y más rápidamente que cualquier persona realizándolos mediante el cálculo analítico y utilizando las teorías tradicionales. Además, como demuestra el proyecto (9), el método de reducción dimensional utilizado en este trabajo es mucho más rápido calculando que los programas de métodos numéricos que se encuentran actualmente en el mercado.

Otra ventaja que tiene este método de reducción dimensional sobre los programas de métodos numéricos actualmente utilizados, es que con una computadora de unas características estándar podemos realizar simulaciones de problemas complejos que serían imposibles de llevar a cabo o se necesitaría poseer una computadora de altas prestaciones para realizarlos.

En el presente trabajo se ha demostrado que el método de orden reducido que se utiliza, funciona de forma correcta para secciones de varios materiales. Esto puede ser extrapolado al estudio de materiales compuestos como los utilizados en aeronáutica, automoción de alto rendimiento, etc.

En definitiva, el método de reducción dimensional utilizado en este proyecto y que actualmente se encuentra en desarrollo, tiene un gran potencial y es necesario seguir invirtiendo tiempo y conocimiento en él, ya que podría ser una gran aportación para la ingeniería.

Presupuesto

A continuación, se calcularán los costes para llevar a cabo el presente trabajo, estos se desglosarán en tres categorías: coste de material, coste de licencias y coste de ingeniería. Finalmente, se sumarán para obtener el coste final de todo el proyecto.

Coste de material

- Ordenador portátil para la computación de las simulaciones y la elaboración del trabajo:
 - Portátil Lenovo ideapad 700-15ISK: 700 €
 - Procesador Intel® Core™ i5-6300HQ CPU 2.30 GHz
 - RAM 8,00 GB
 - Tipo de sistema 64 bits

Total	700 €
-------	-------

Coste de licencias

- Licencia Solid Works, estándar: 5000 €
- Licencia GiD 14, profesional: 1650 €
- Licencia Matlab, estándar: 2000 €

Total	8650 €
-------	--------

Coste de ingeniería

	Horas	Precio (€/h)	Precio (€)
• Generación de modelos:	96	38	3648
• Cálculo y simulación:			
○ Cálculo analítico:	72	38	2736
○ Entrenamiento de rebanada:	168	38	6384
○ Modelo de orden reducido:	48	38	1824
• Redacción del proyecto:	144	38	5472
<hr/>			
Total			20064 €

Coste total

• Coste de material	700 €
• Coste de licencias	8650 €
• Coste de ingeniería	20064 €
<hr/>	
Total	29414 €
IVA (21%)	6176.94 €
<hr/>	
Total + IVA (21%)	35590.94 €

Se debe mencionar que, al estar matriculado en la universidad, las licencias de todos los programas que se han utilizado en el presente trabajo, no han supuesto ningún coste económico, puesto que se han obtenido a través de los destinos convenios que tiene la universidad con los distribuidores oficiales de los programas.

Bibliografía

1. Ruiz, M.C. i Díaz, E.B. *Mecánica de estructuras. Libro 1. Resistencia de materiales*. 2001. ISBN 1317763912. DOI 10.13140/RG.2.1.4664.1763.
2. Martínez Rodrigo, M.D. et al. *Resistencia de materiales* [en línea]. 2013. ISBN 9788415443841. DOI 10.6035/INFiTEC.2002.12. Disponible a:
http://www.tenda.uji.es/pls/iglu/!GCPPA00.GCPPR0002?lg=CA&id_art=1280.
3. Borja Varona Moya José Antonio López Juárez Luis Bañón Blázquez, F. DE et al. APUNTES DE HORMIGÓN ARMADO Adaptados a la Instrucción EHE-08. A: *Apuntes De Hormigon Armado*. 2012, p. 1-277.
4. Montes, E.H. Hormigon Estructural. A: . 2003, p. 5-30.
5. Miguell Cervera Ruiz, E.B.D. Mecánica y Resistencia de Materiales. A: . 2013, Vol. 978-84-942.
6. Ortega, J.A.H. Historial Acad emico , Docente e Investigador , Proyecto Investigador y Proyecto Docente Indice Historial Acad emico. A: . p. 1-54.
7. España, G. de. Capítulo II. A: [en línea]. p. 15-22. Disponible a:
http://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/documentos/ladi/madera_f_j/capitulo2.pdf.
8. España, G. de. Capítulo VII. A: . 2002, p. 160-163. DOI 10.1139/F06-177.
9. Ortega, Joaquín A. Hernández, E.O. Study of aerolastic behavior of a wing using reduced-order modeling and domain decomposition Aerospace technologies Audiovisual de Terrassa. A: . 2018,
10. Gabriel Salvatore Principe. <https://gabrielesprincipe.wordpress.com/2015/03/16/el-hormigon-armado/> [en línea]. Disponible a: <https://gabrielesprincipe.wordpress.com/2015/03/16/el-hormigon-armado/>.

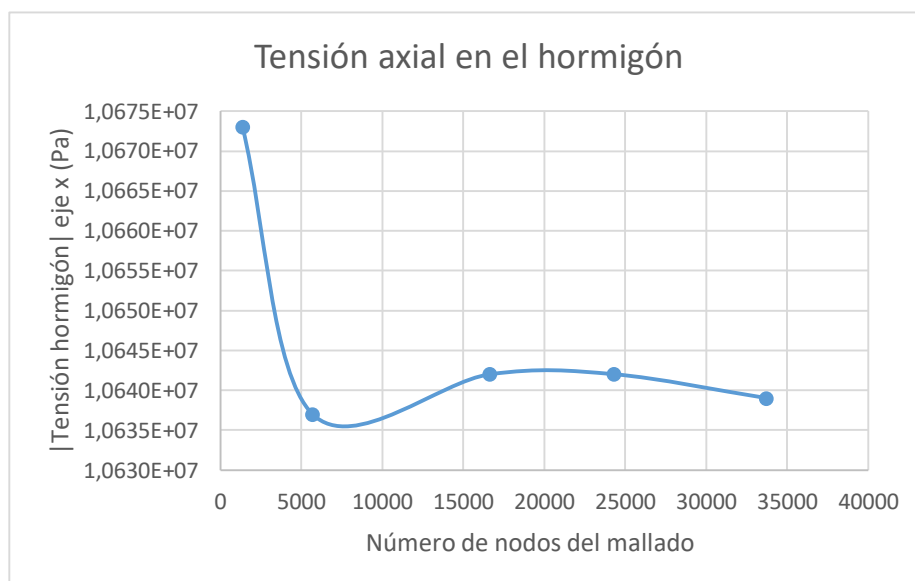
Anexo A. Estudios de convergencia y Mallas

En este anexo se presentan los estudios de convergencia de malla, las características y la imagen de la malla utilizada en el cálculo, para todas las geometrías estudiadas.

A.1. Columnas de hormigón armado sometidas a compresión

A.1.1. Perfil rectangular de 350x250 mm

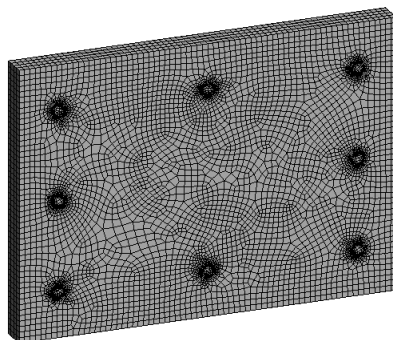
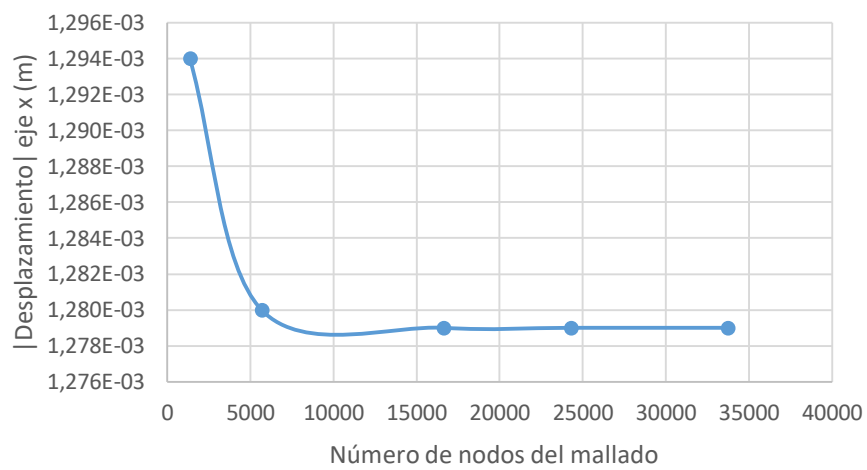
Número de nodos	Tensión hormigón eje x (Pa)	Tensión acero eje x (Pa)	Desplazamiento eje x (m)	Tamaño de malla del hormigón	Número de divisiones de la malla del acero
1374	1,0673E+07	8,5937E+07	1,294E-03	0,03	0
5685	1,0637E+07	8,5933E+07	1,280E-03	0,01	20
16650	1,0642E+07	8,5827E+07	1,279E-03	0,007	30
24300	1,0642E+07	8,5792E+07	1,279E-03	0,006	40
33725	1,0639E+07	8,5785E+07	1,279E-03	0,005	60



Tensión axial en el acero

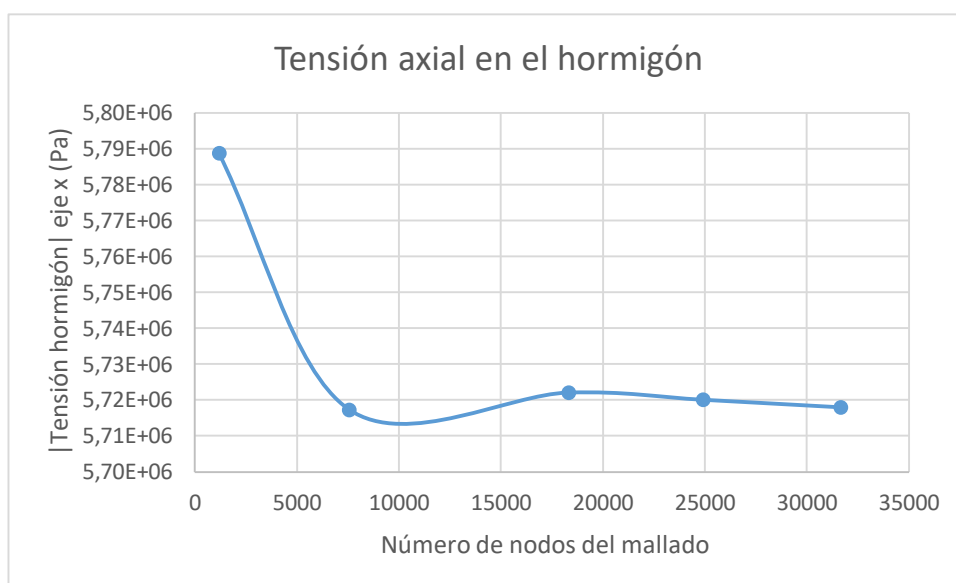


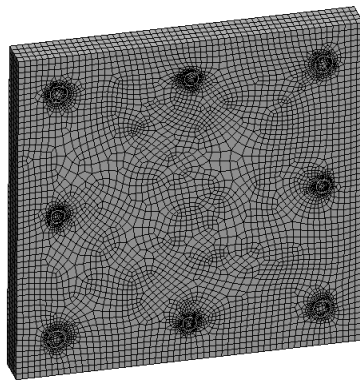
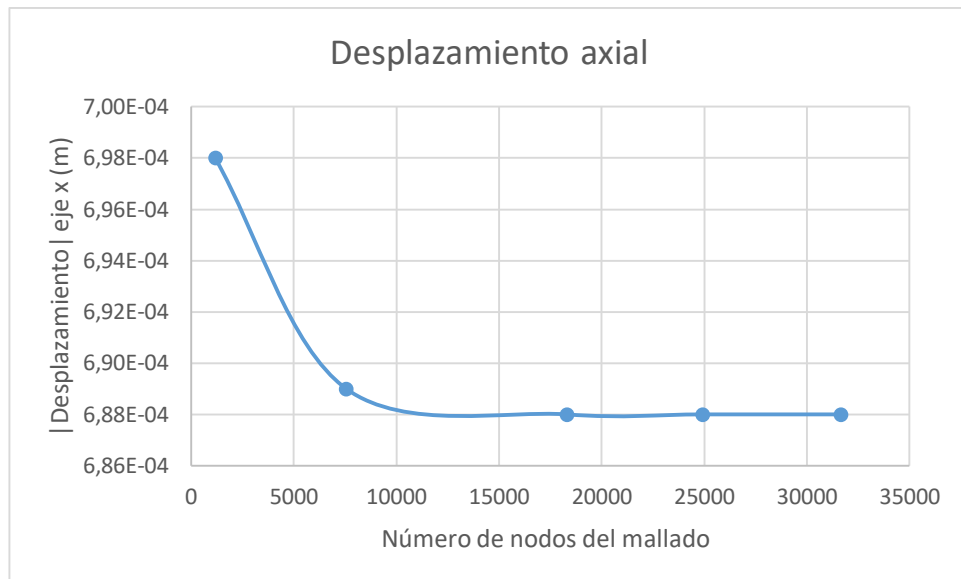
Desplazamiento axial



A.1.2. Perfil rectangular de 400x400 mm

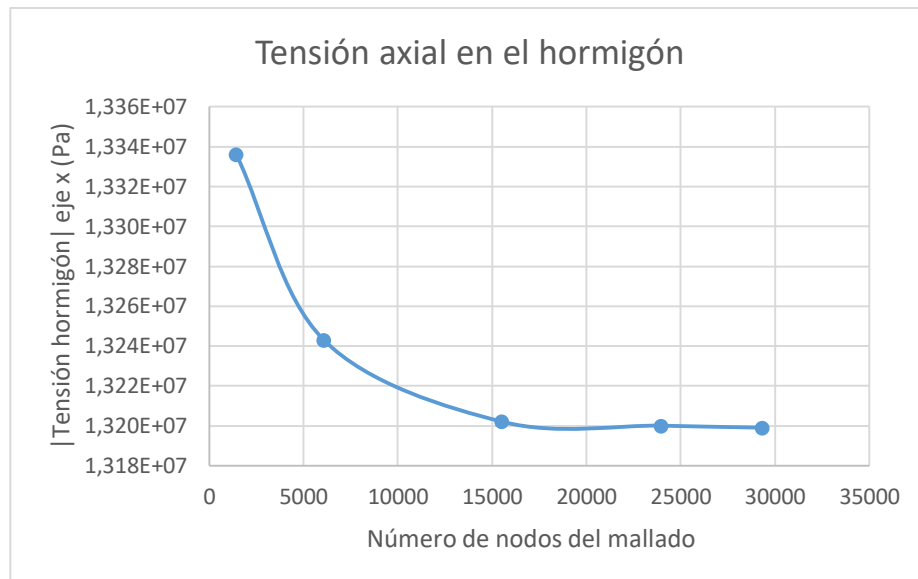
Número de nodos	Tensión hormigón eje x (Pa)	Tensión acero eje x (Pa)	Desplazamiento eje x (m)	Tamaño de malla del hormigón	Número de divisiones de la malla del acero
1173	5,7888E+06	4,6947E+07	6,98E-04	0,03	0
7560	5,7173E+06	4,6219E+07	6,89E-04	0,01	20
18300	5,7220E+06	4,6177E+07	6,88E-04	0,009	30
24920	5,7200E+06	4,6165E+07	6,88E-04	0,008	40
31650	5,7179E+06	4,6148E+07	6,88E-04	0,007	50

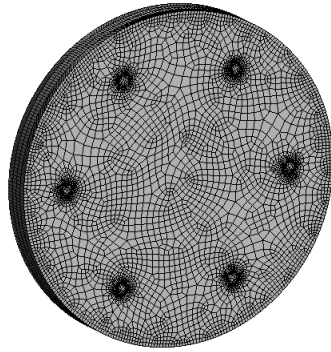




A.1.3. Perfil circular de diámetro 300 mm

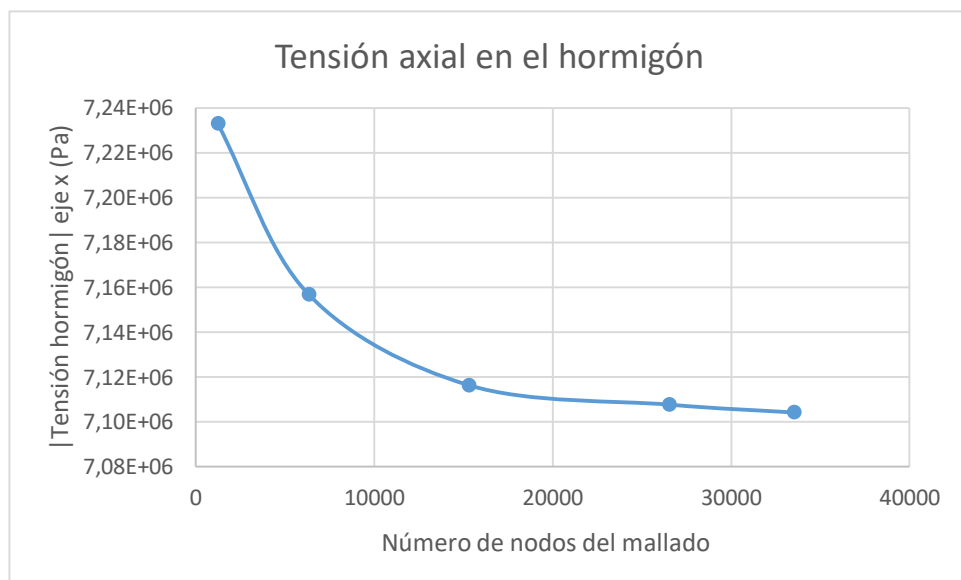
Número de nodos	Tensión hormigón eje x (Pa)	Tensión acero eje x (Pa)	Desplazamiento eje x (m)	Tamaño de malla del hormigón	Número de divisiones de la malla del acero
1446	1,3336E+07	1,0822E+08	1,610E-03	0,02	0
6078	1,3243E+07	1,0688E+08	1,593E-03	0,01	10
15525	1,3202E+07	1,0677E+08	1,592E-03	0,008	15
23965	1,3200E+07	1,0672E+08	1,591E-03	0,006	20
29350	1,3199E+07	1,0672E+08	1,591E-03	0,0055	25

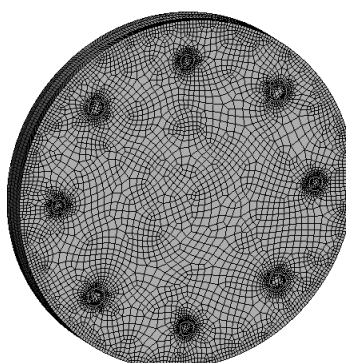
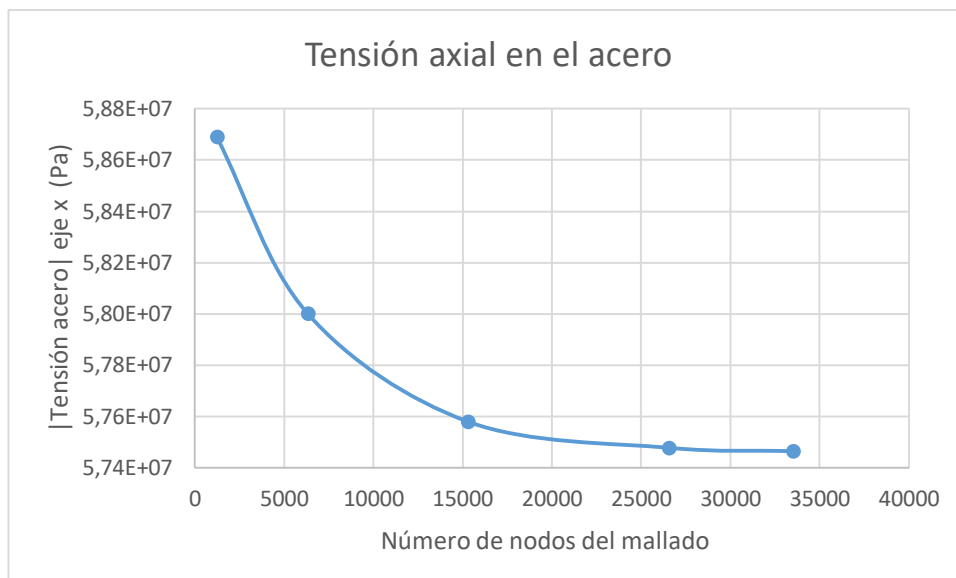




A.1.4. Perfil circular de diámetro 400 mm

Número de nodos	Tensión hormigón eje x (Pa)	Tensión acero eje x (Pa)	Desplazamiento eje x (m)	Tamaño de malla del hormigón	Número de divisiones de la malla del acero
1236	7,2330E+06	5,8691E+07	8,73E-04	0,03	0
6327	7,1569E+06	5,8001E+07	8,62E-04	0,01	5
15300	7,1164E+06	5,7579E+07	8,58E-04	0,009	10
26545	7,1077E+06	5,7477E+07	8,57E-04	0,008	20
33530	7,1042E+06	5,7464E+07	8,57E-04	0,007	25

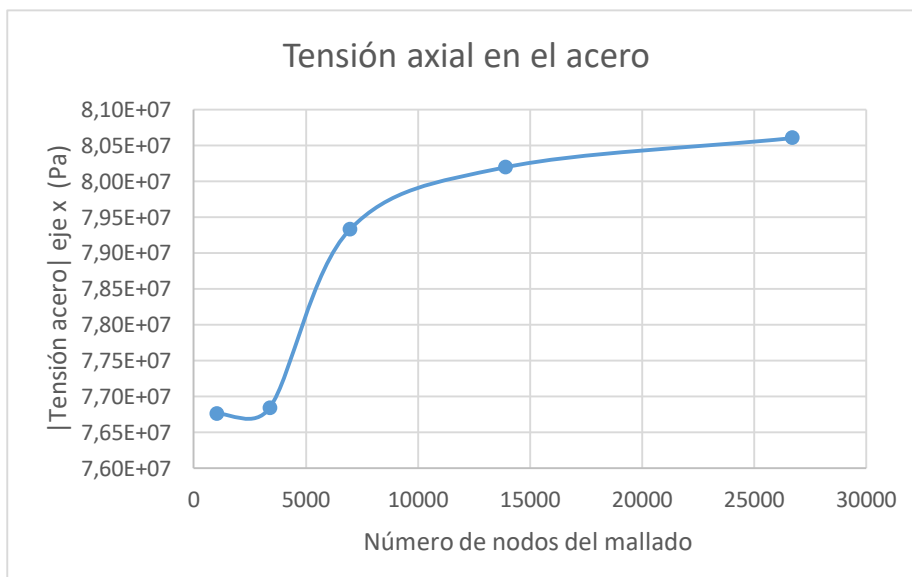
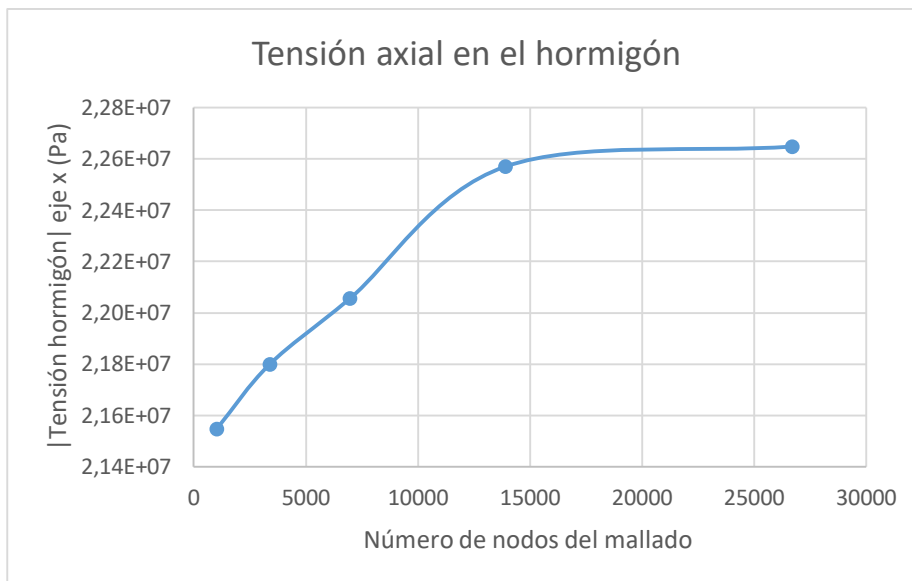


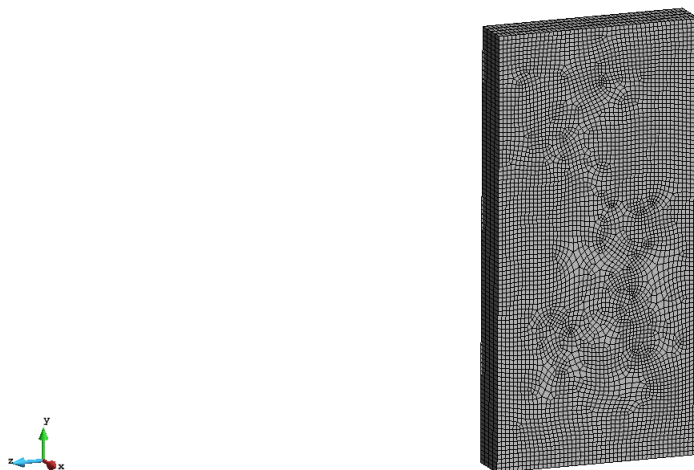


A.2. Viga sometida a flexión compuesta recta

A.2.1. Perfil rectangular con refuerzo de acero

Número de nodos	Tensión hormigón eje x (Pa)	Tensión acero eje x (Pa)	Tamaño de malla del hormigón
1023	2,1547E+07	7,6758E+07	0,01
3375	2,1798E+07	7,6839E+07	0,007
6970	2,2056E+07	7,9333E+07	0,005
13905	2,2571E+07	8,0197E+07	0,0035
26700	2,2649E+07	8,0604E+07	0,002



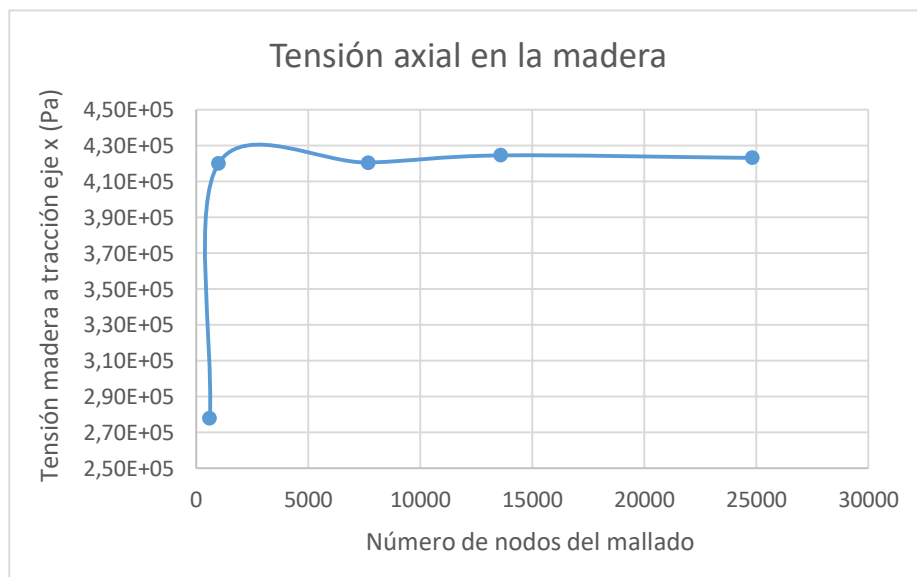


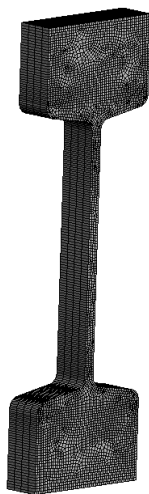
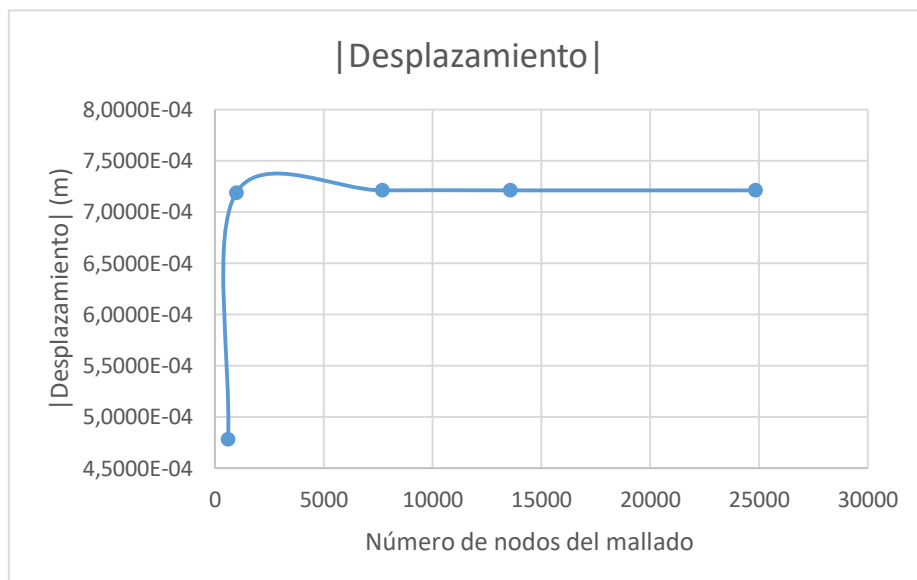
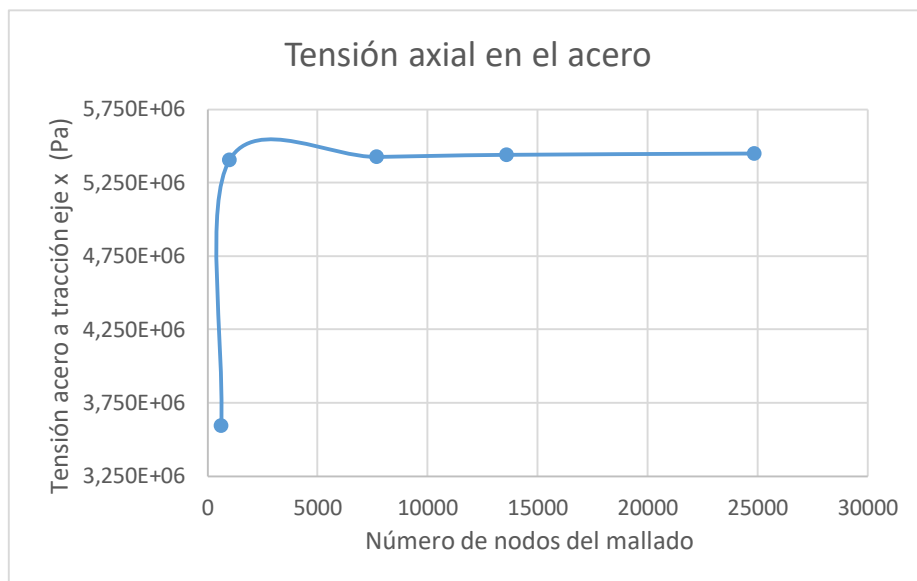
GID

A.3. Viga sometida a flexión simple

A.3.1 Perfil IPN200 con refuerzos de madera

Número de nodos	Tensión madera a tracción eje x (Pa)	Tensión acero a tracción eje x (Pa)	Desplazamiento eje x (m)	Tamaño de malla del hormigón
610	2,7797E+05	3,5932E+06	4,78E-04	0,03
993	4,1997E+05	5,4040E+06	7,19E-04	0,007
7705	4,2050E+05	5,4233E+06	7,21E-04	0,0035
13595	4,2447E+05	5,4376E+06	7,21E-04	0,0025
24845	4,2307E+05	5,4466E+06	7,21E-04	0,0018





GID



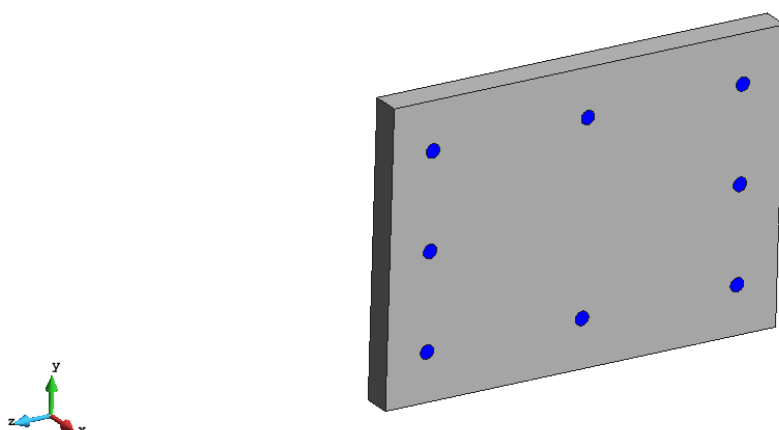
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola d'Enginyeria de Barcelona Est

Anexo B. Entrenamiento básico

A continuación, se muestra el entrenamiento básico realizado para las distintas secciones que se han utilizado en el desarrollo de este estudio.

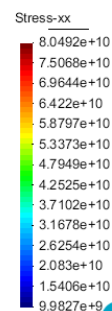
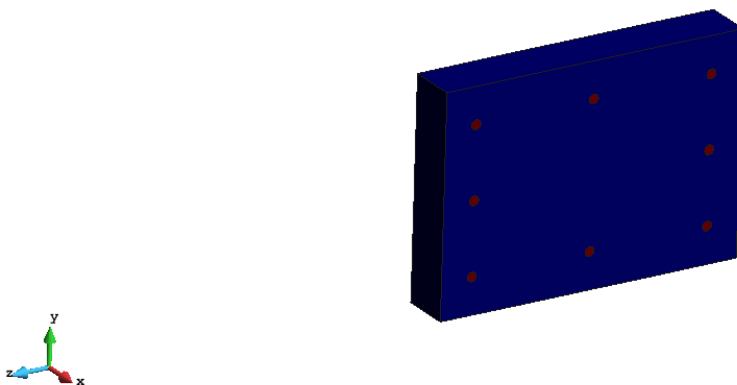
B.1. Columnas de hormigón armado sometidas a compresión

B.1.1. Perfil rectangular de 350x250 mm

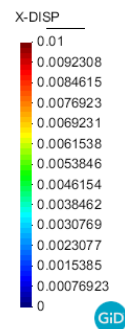
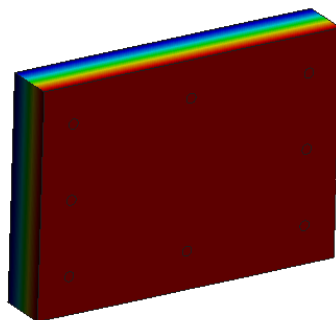


GiD

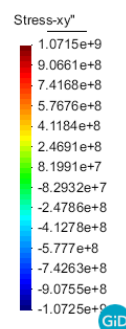
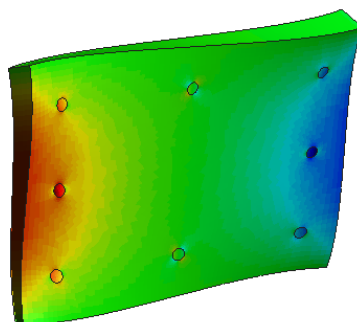
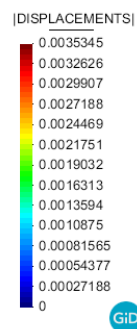
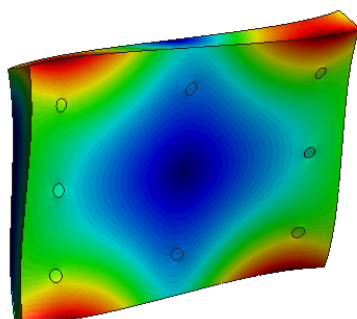
B.1.1.1. Ensayo axial

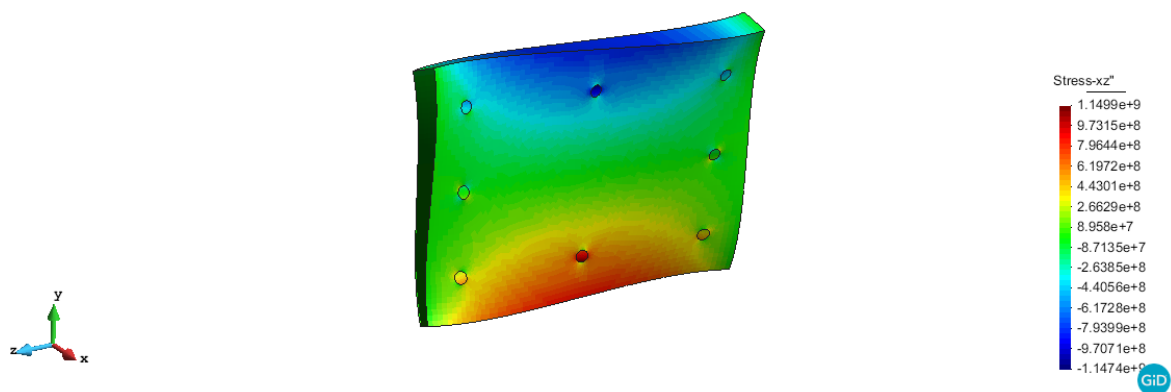


GiD

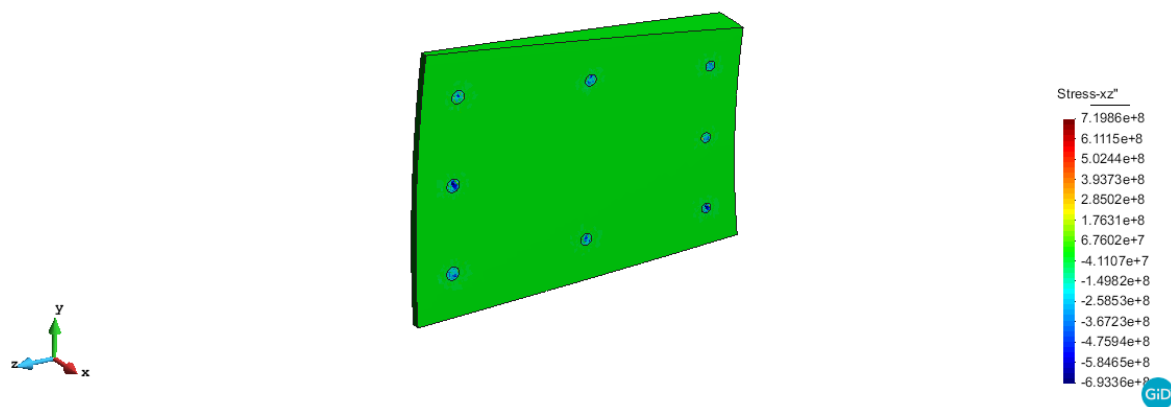
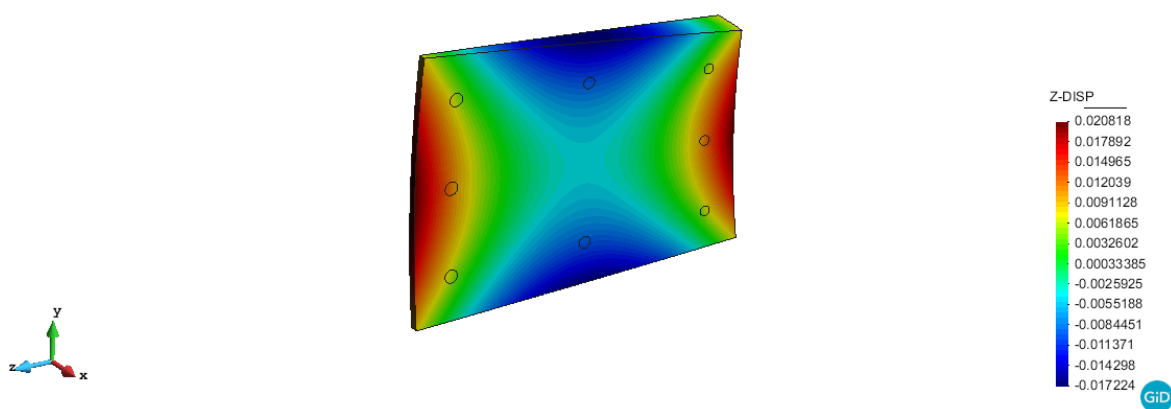


B.1.1.2. Perfil rectangular de

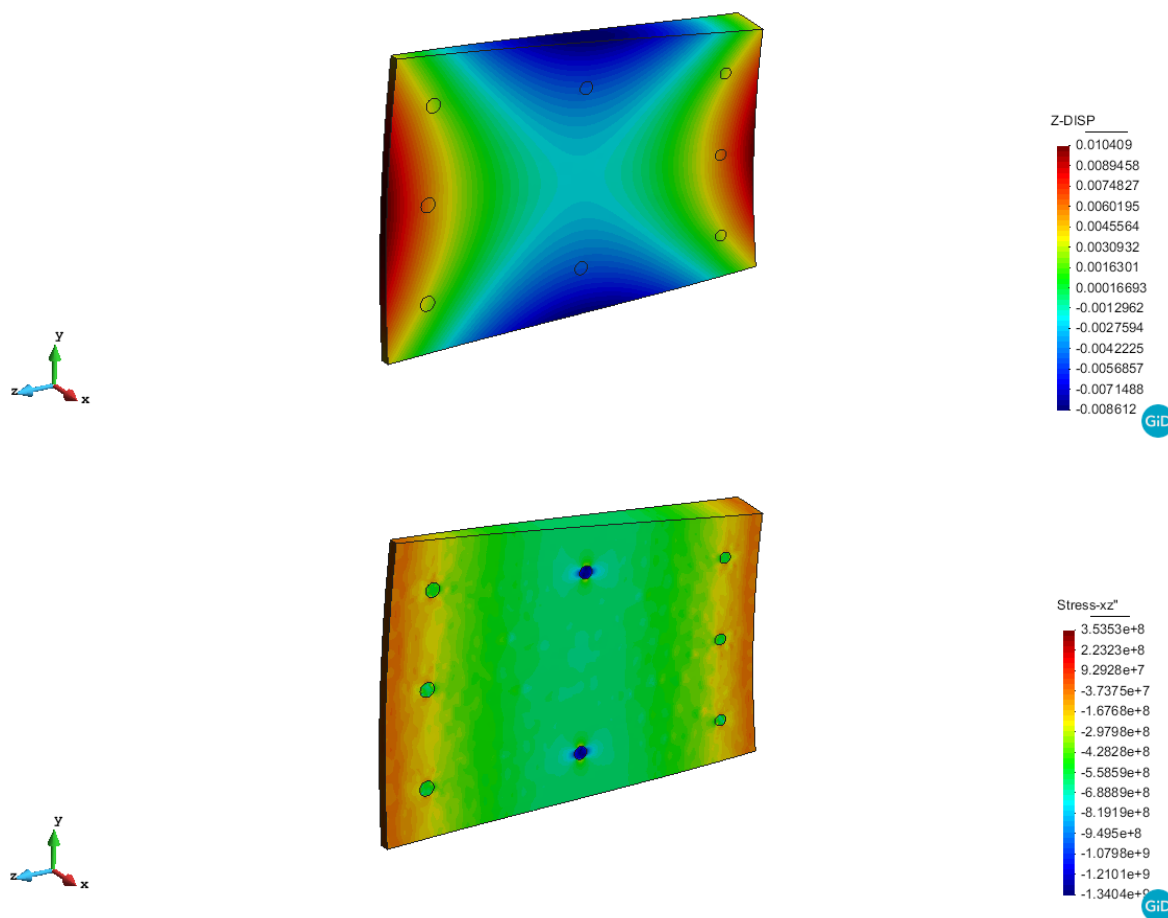




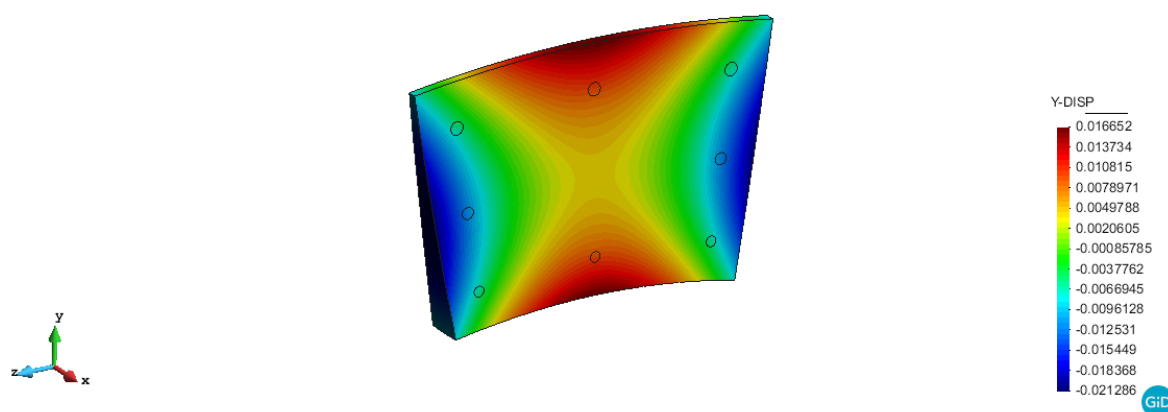
B.1.1.3. Ensayo de flexión pura en el eje Y

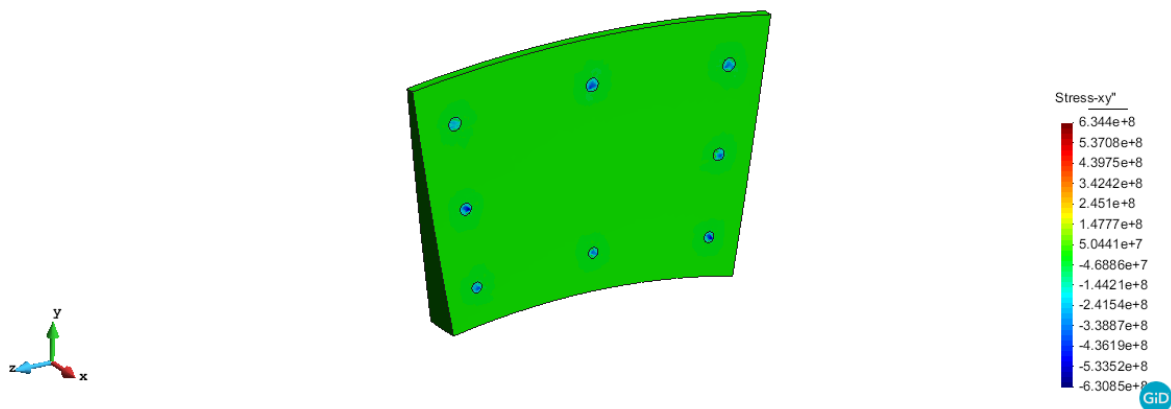


B.1.1.4. Ensayo de flexión simple en el eje Y

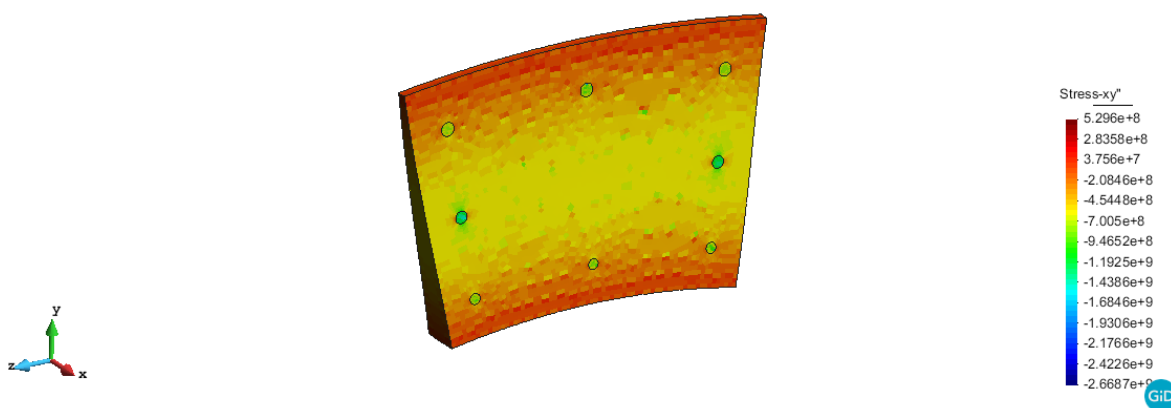
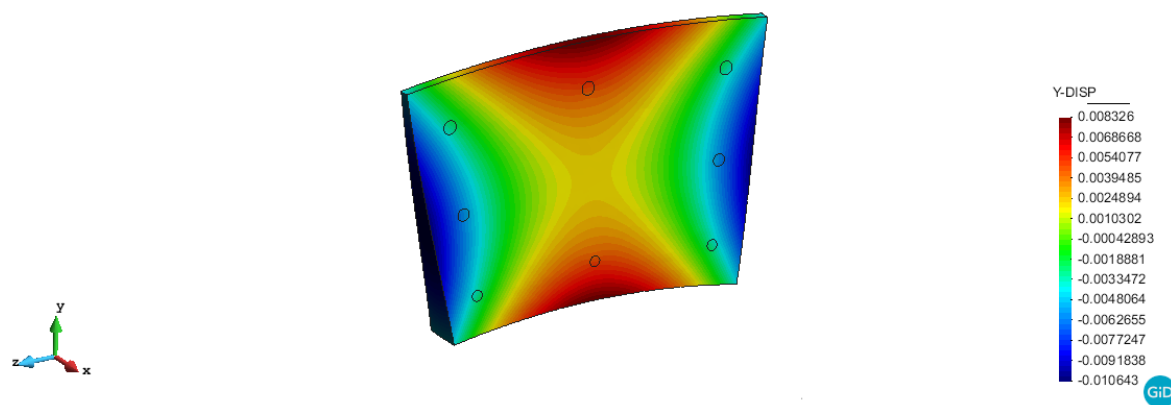


B.1.1.5. Ensayo de flexión pura en el eje Z

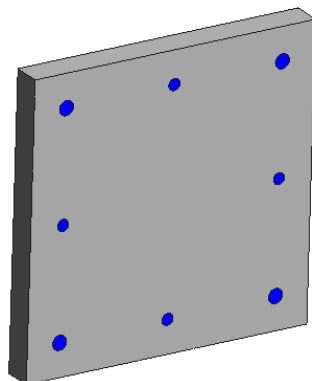




B.1.1.6. Ensayo de flexión simple en el eje Z

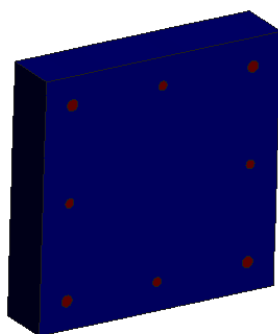


B.1.2. Perfil rectangular de 400x400 mm

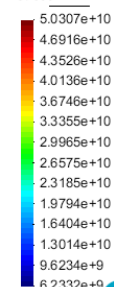


GiD

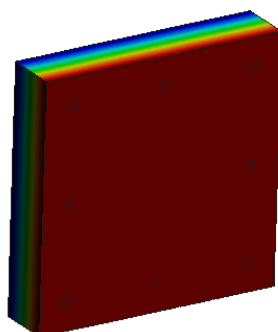
B.1.2.1. Ensayo axial



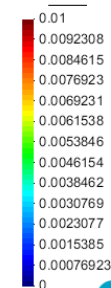
Stress-xx



GiD

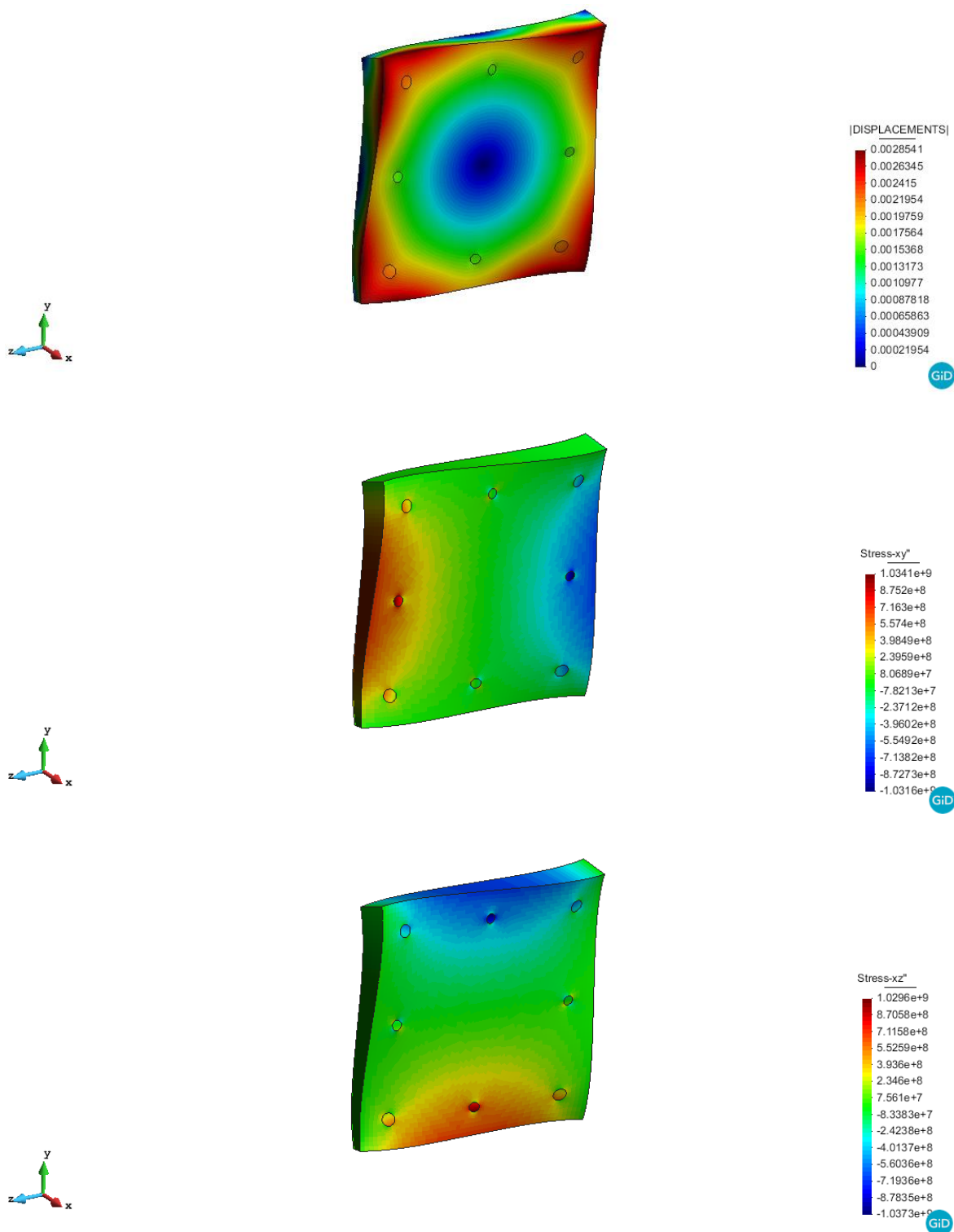


X-DISP

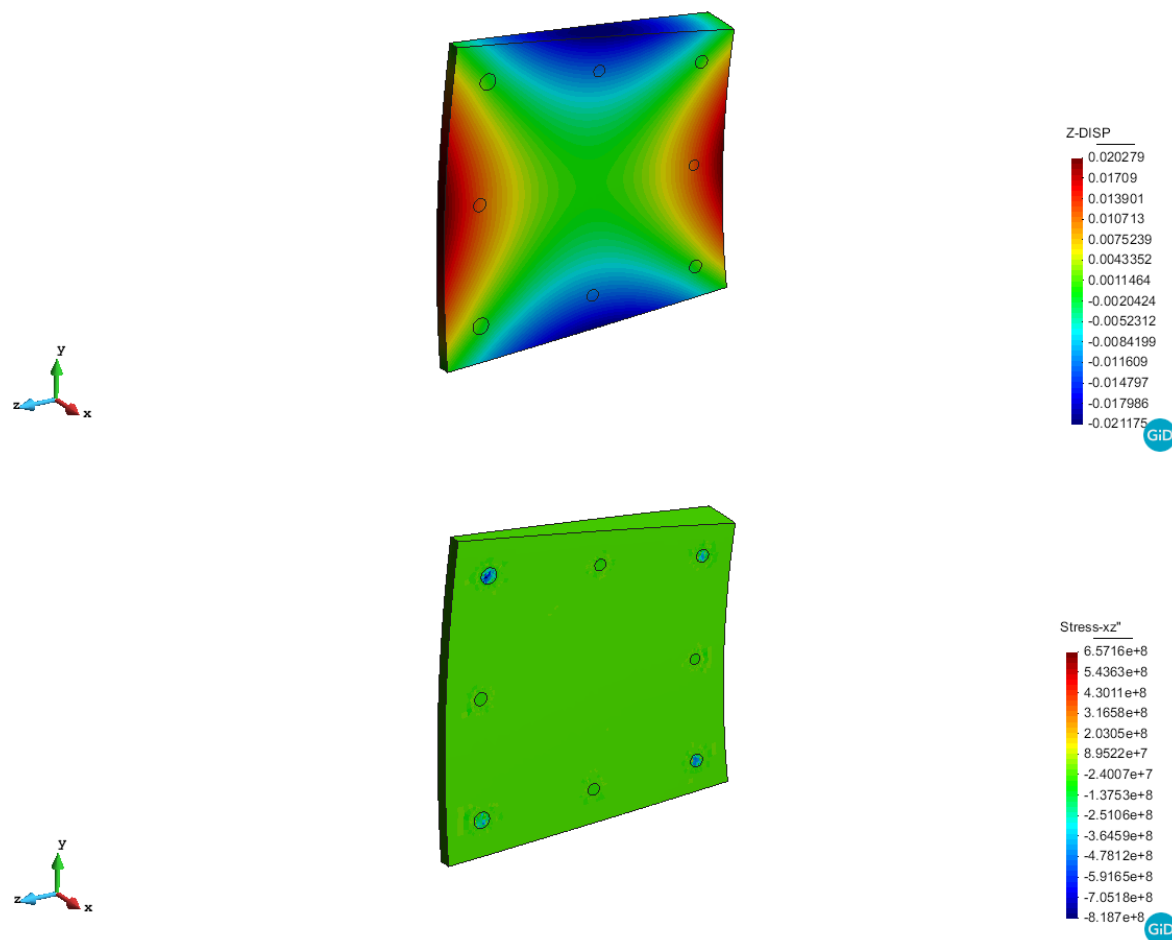


GiD

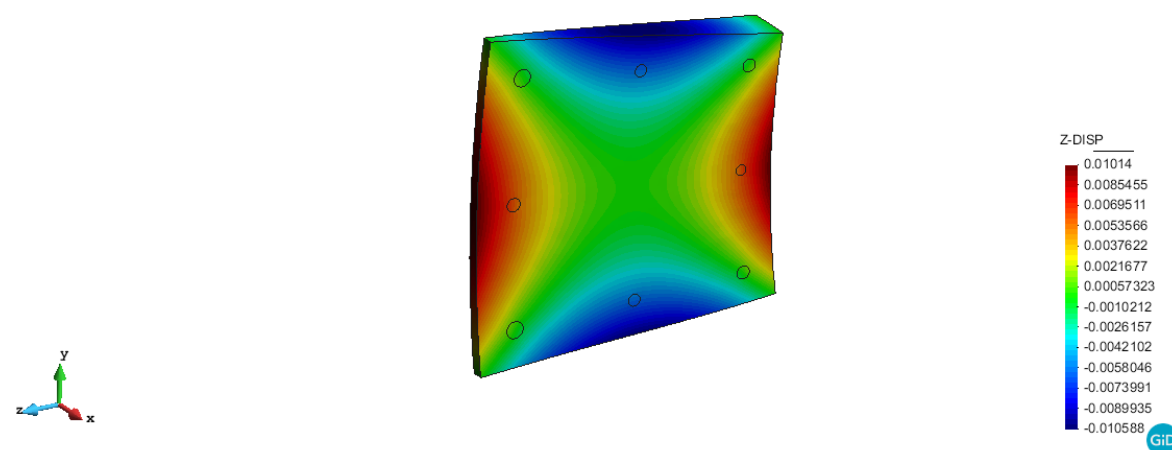
B.1.2.2. Ensayo de torsión

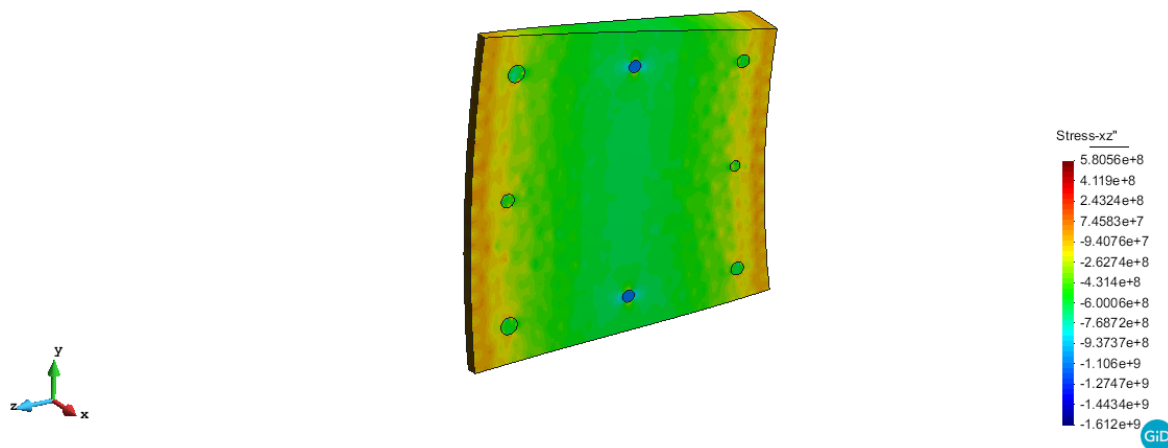


B.1.2.3. Ensayo de flexión pura en el eje Y

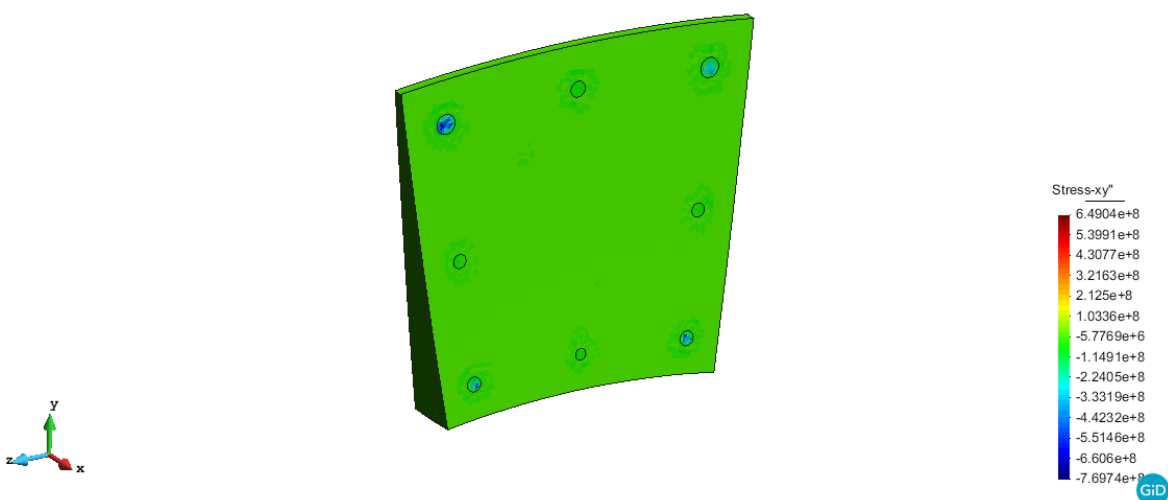
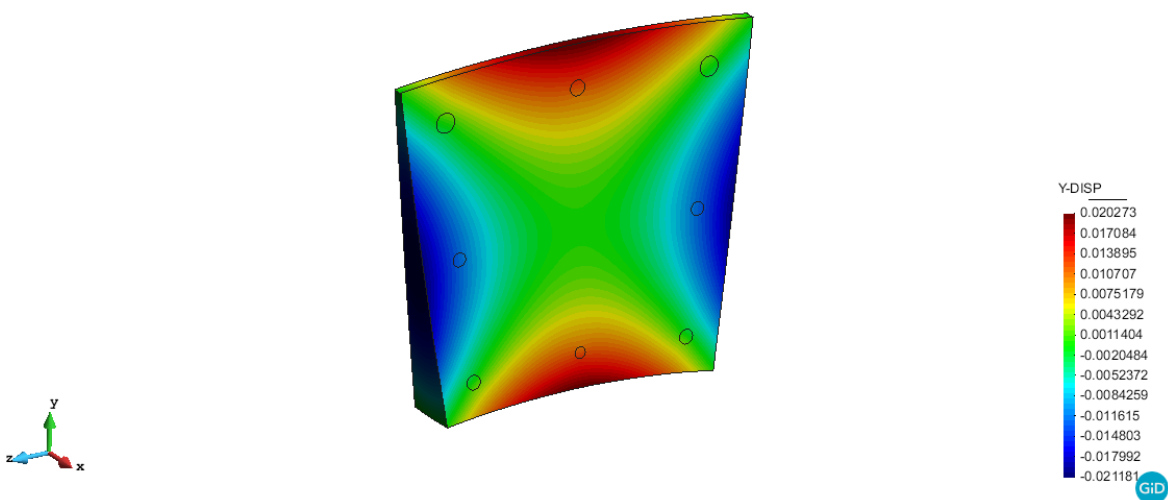


B.1.2.4. Ensayo de flexión simple en el eje Y

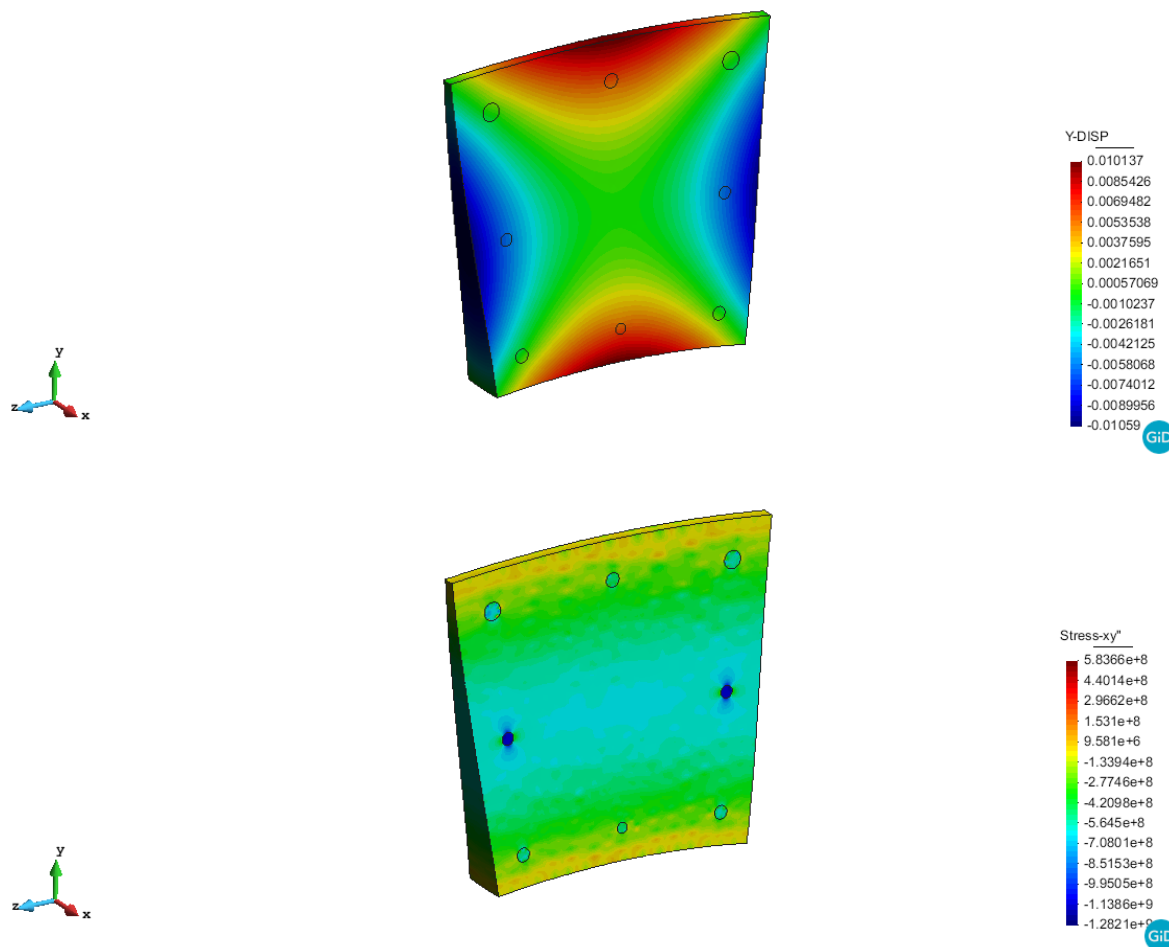




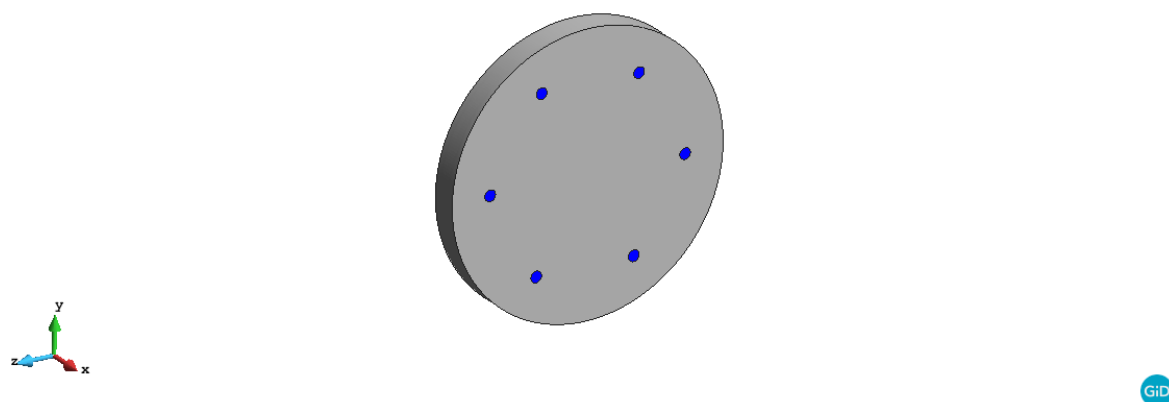
B.1.2.5. Ensayo de flexión pura en el eje Z



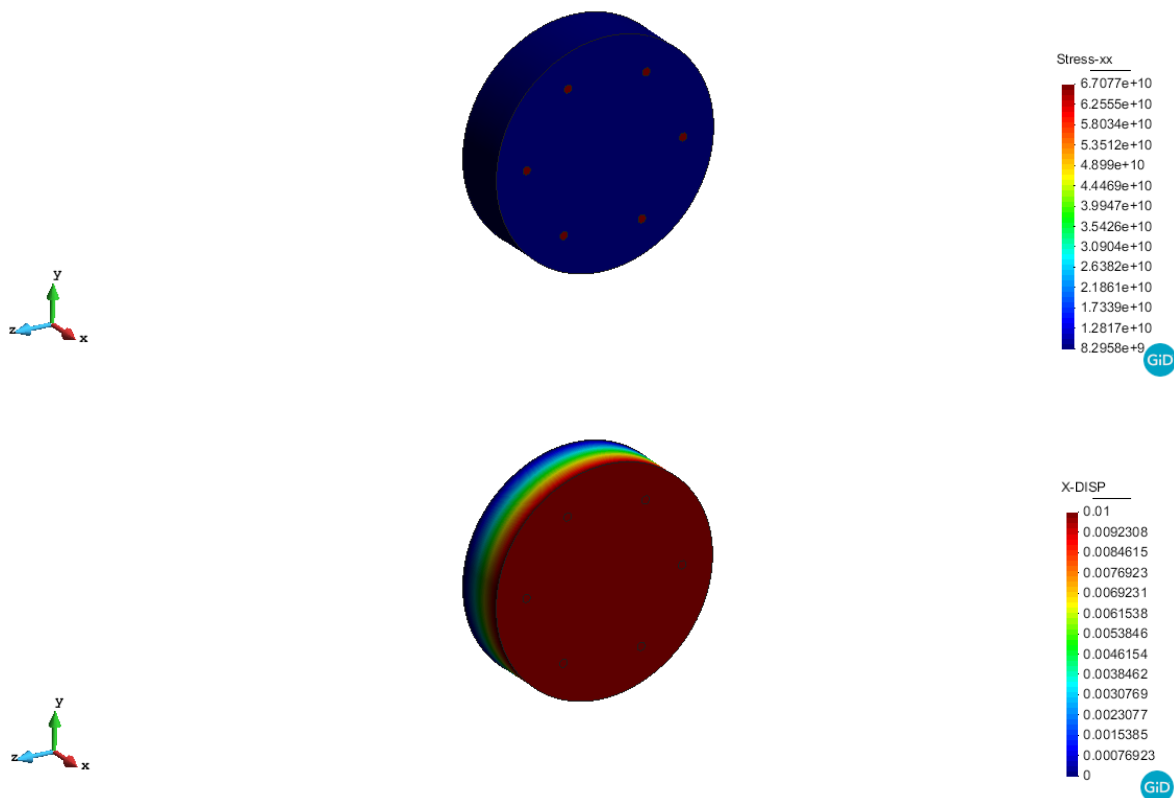
B.1.2.6. Ensayo de flexión simple en el eje Z



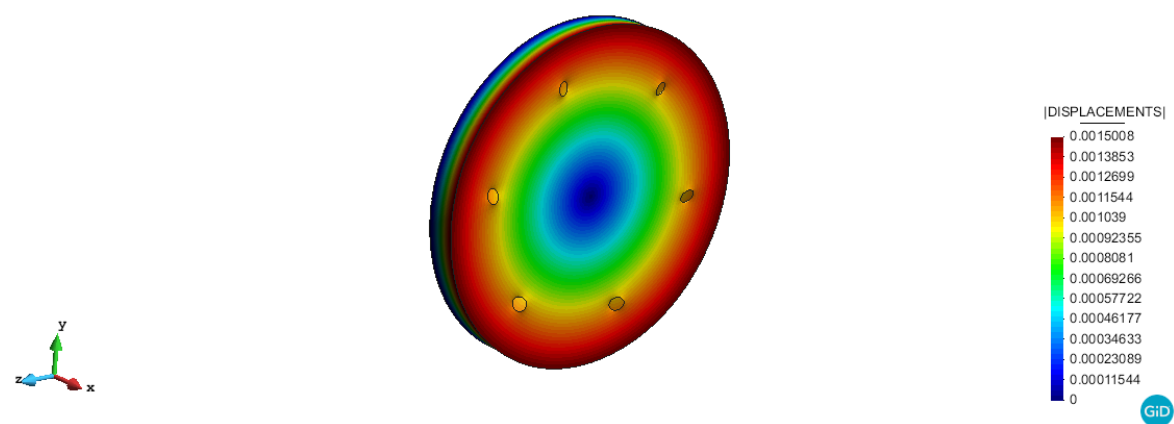
B.1.3. Perfil circular de diámetro 300 mm

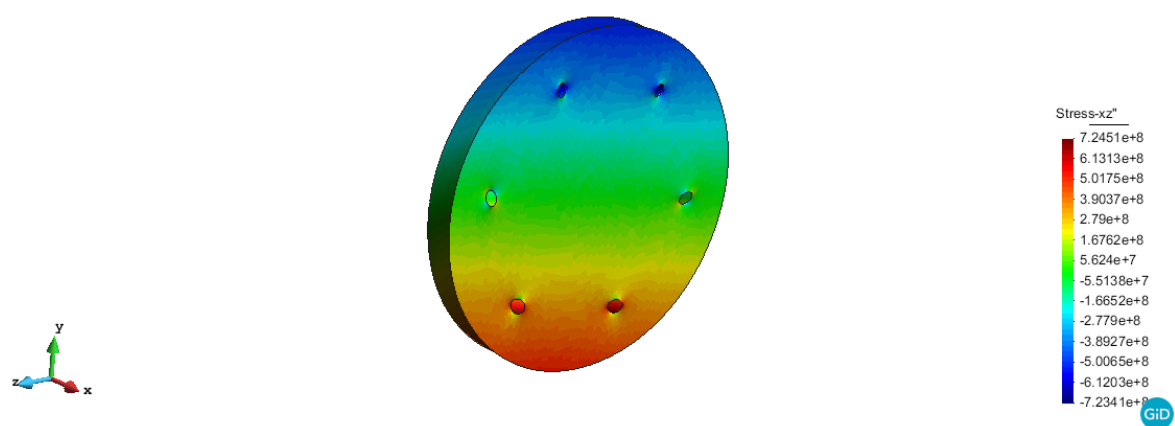
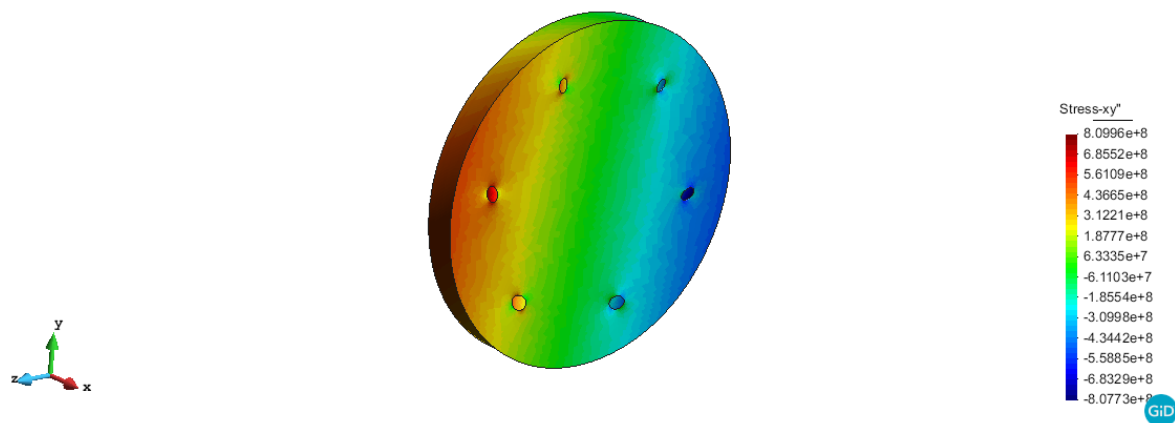


B.1.3.1. Ensayo axial

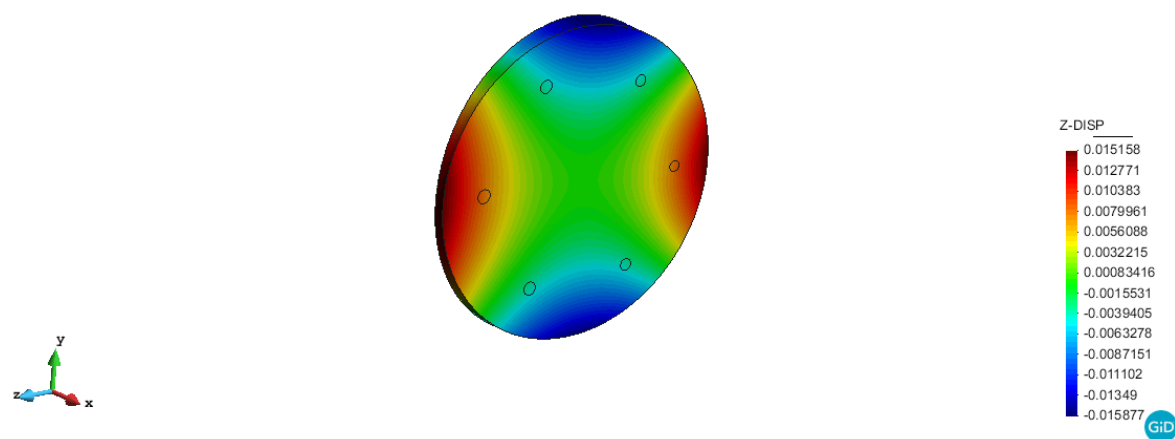


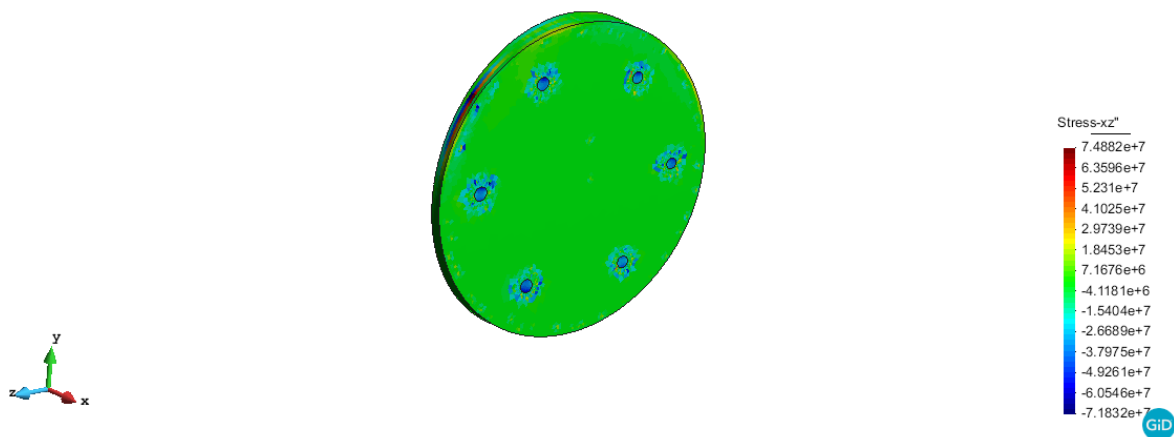
B.1.3.2. Ensayo de torsión



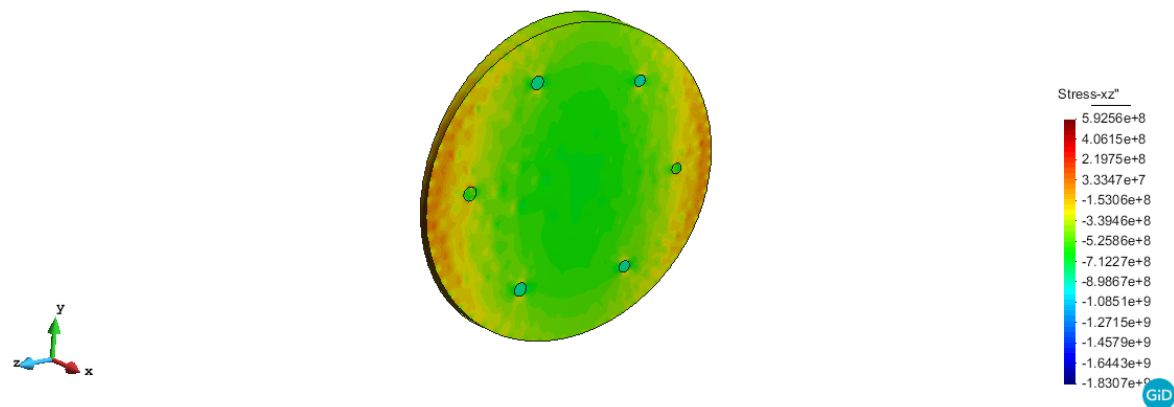
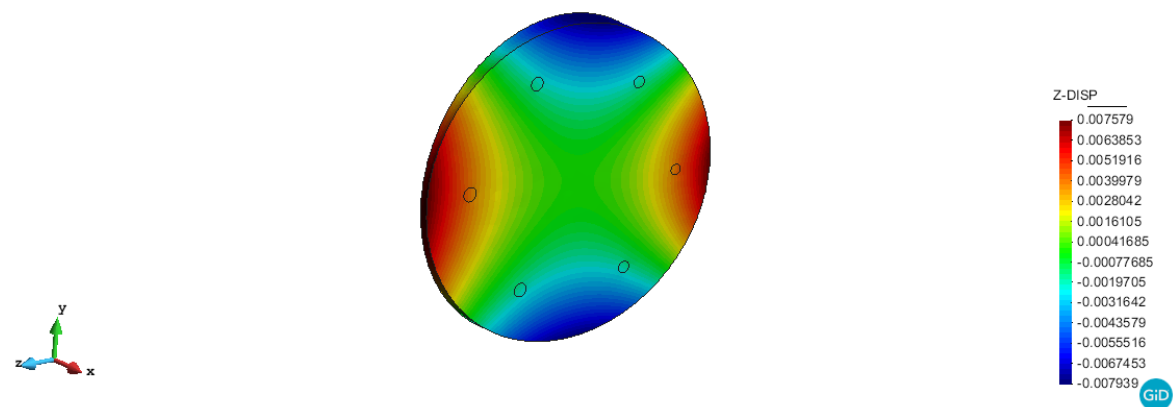


B.1.3.3. Ensayo de flexión pura en el eje Y

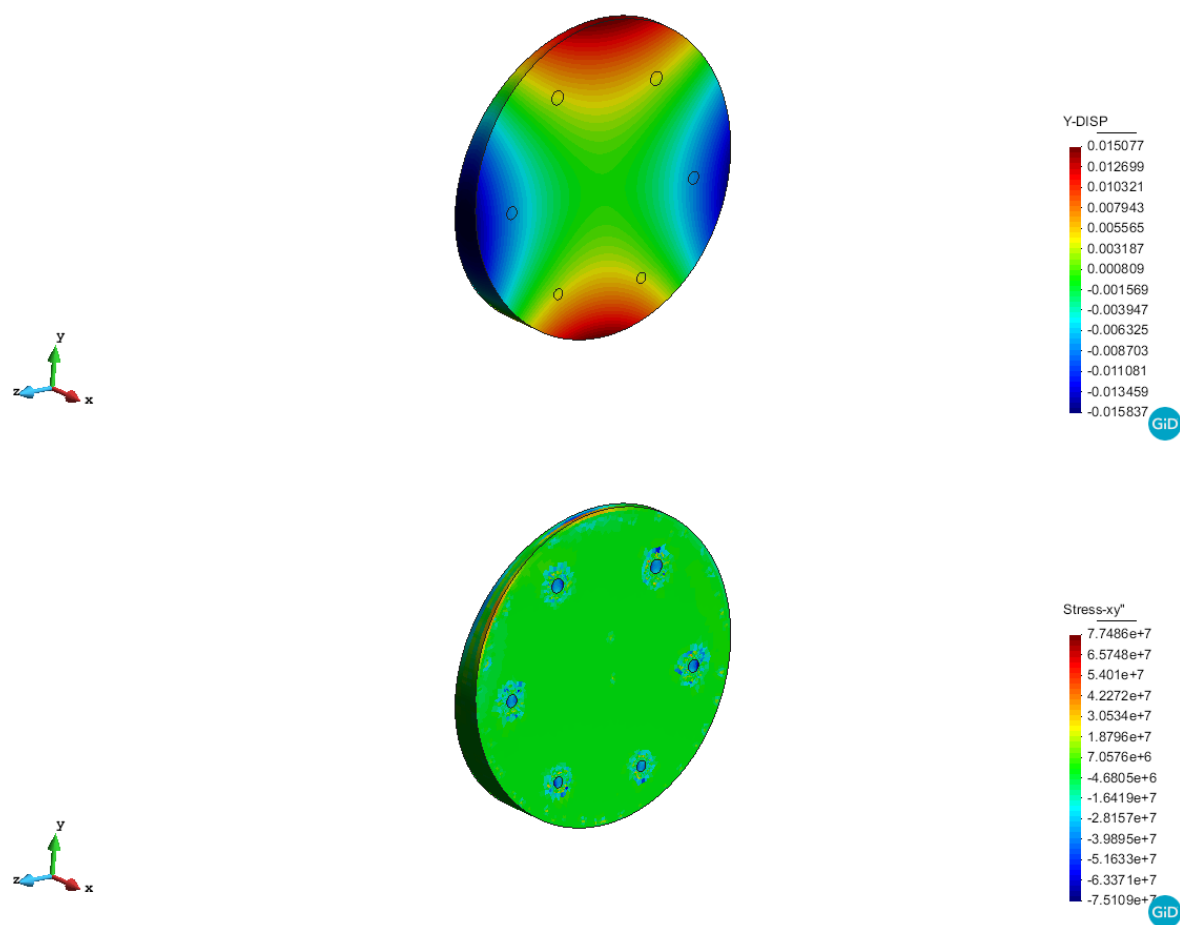




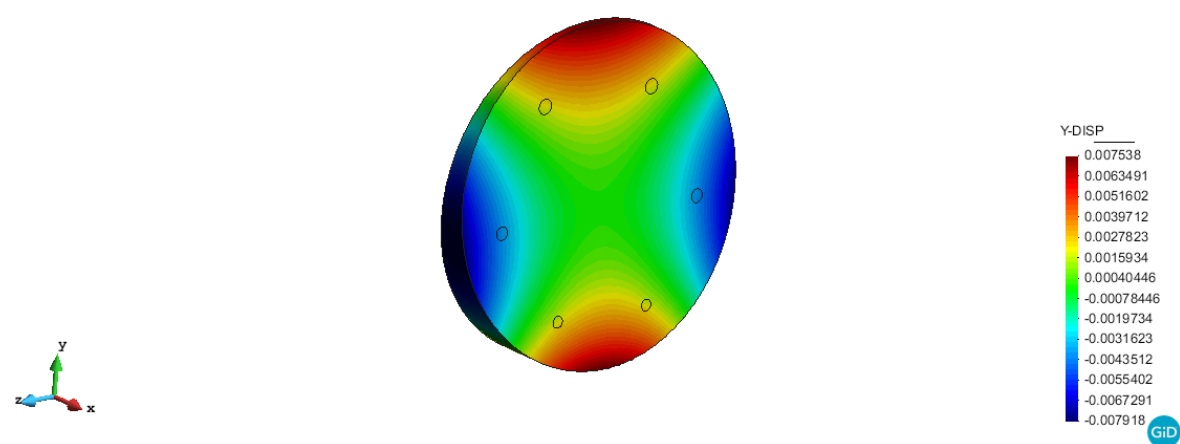
B.1.3.4. Ensayo de flexión simple en el eje Y

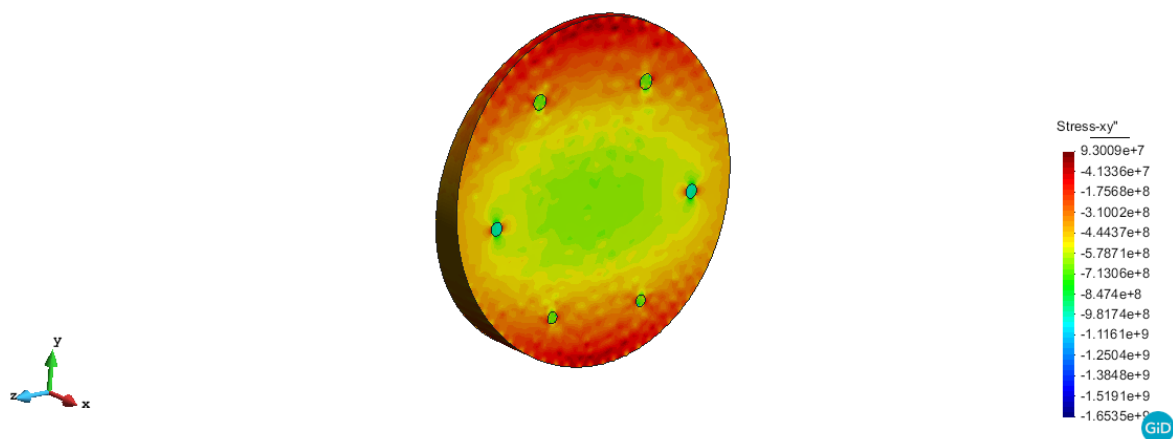


B.1.3.5. Ensayo de flexión pura en el eje Z

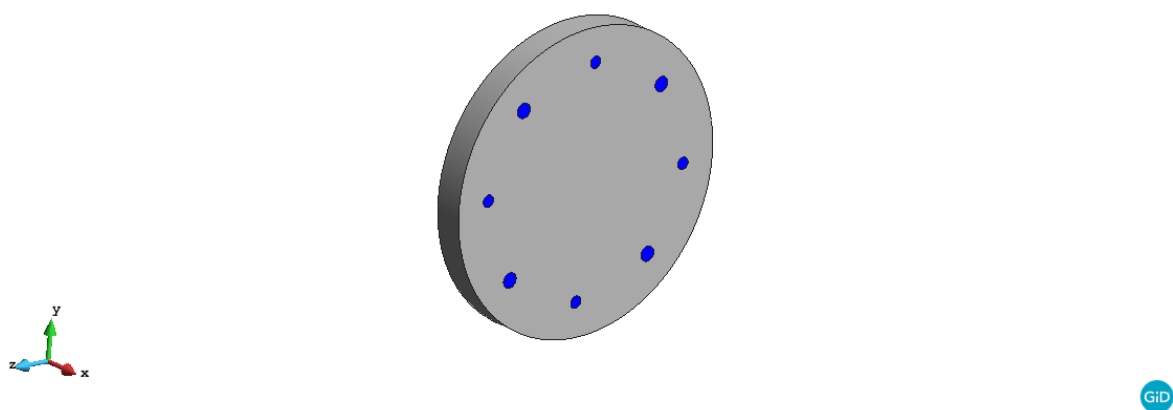


B.1.3.6. Ensayo de flexión simple en el eje Z

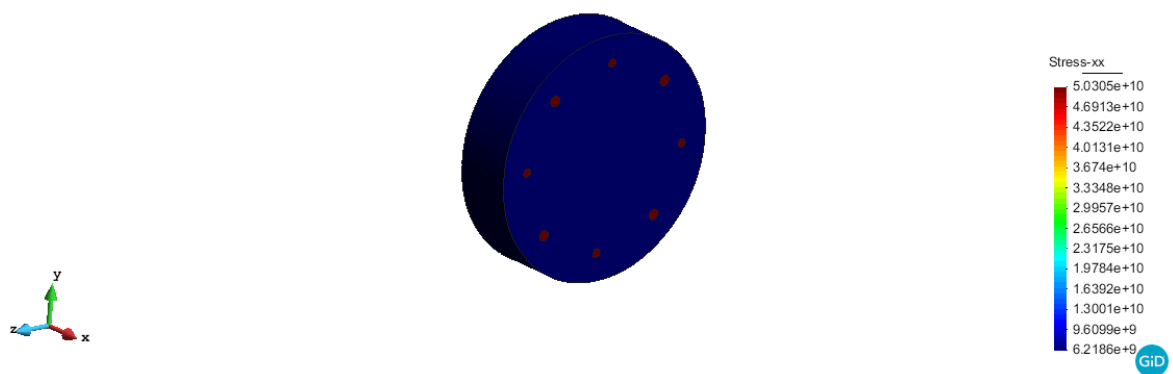


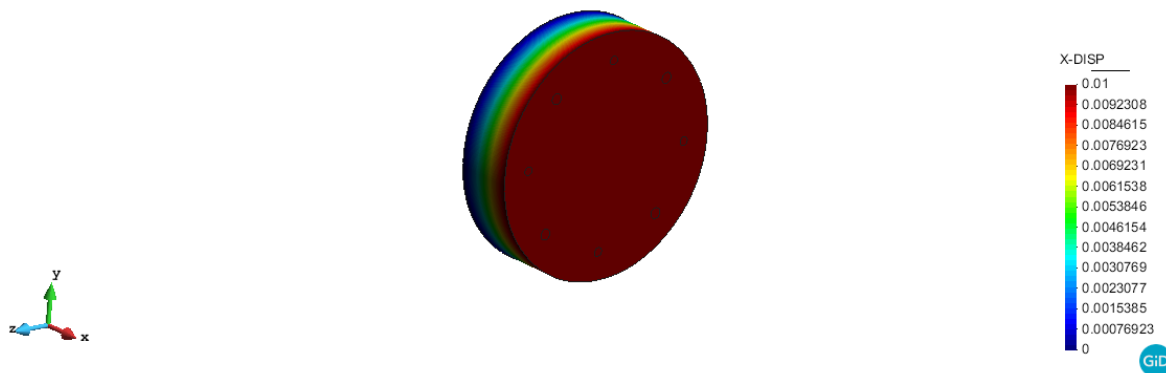


B.1.4. Perfil circular de diámetro 400 mm

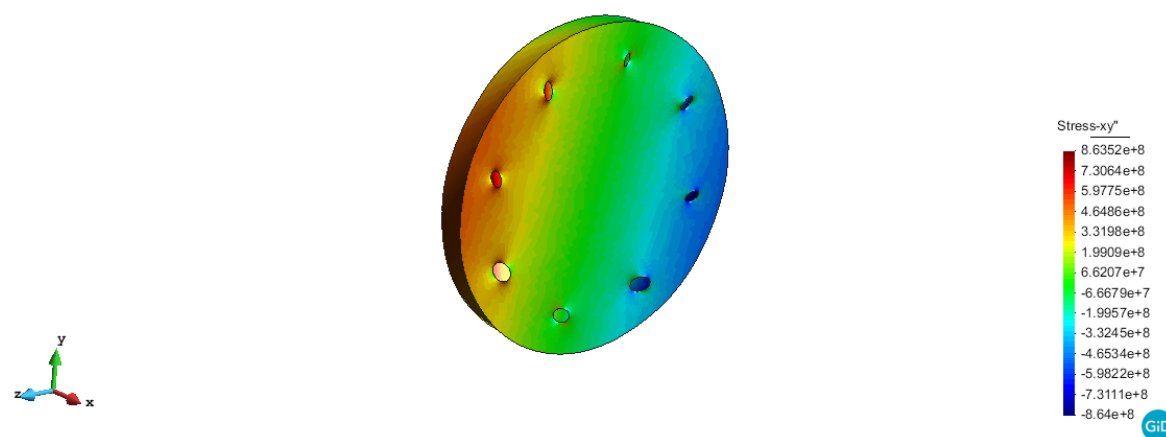
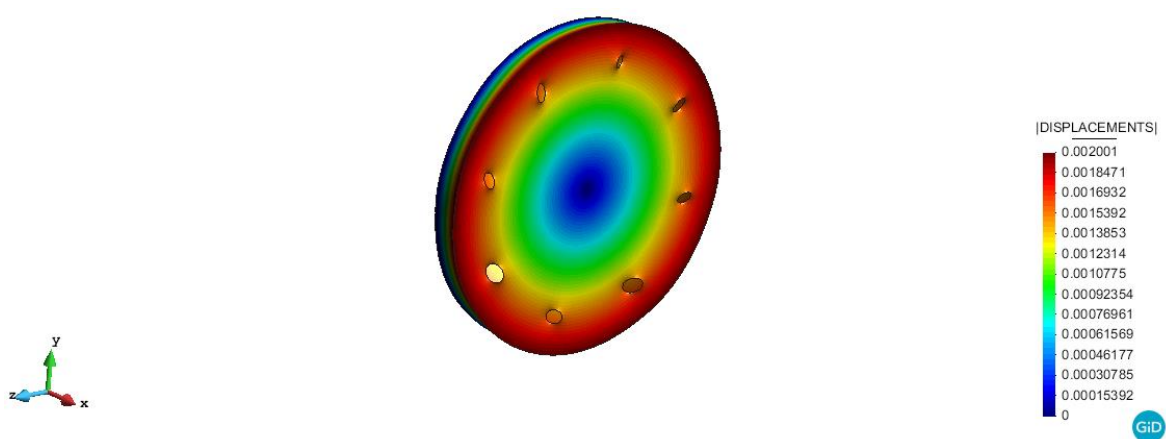


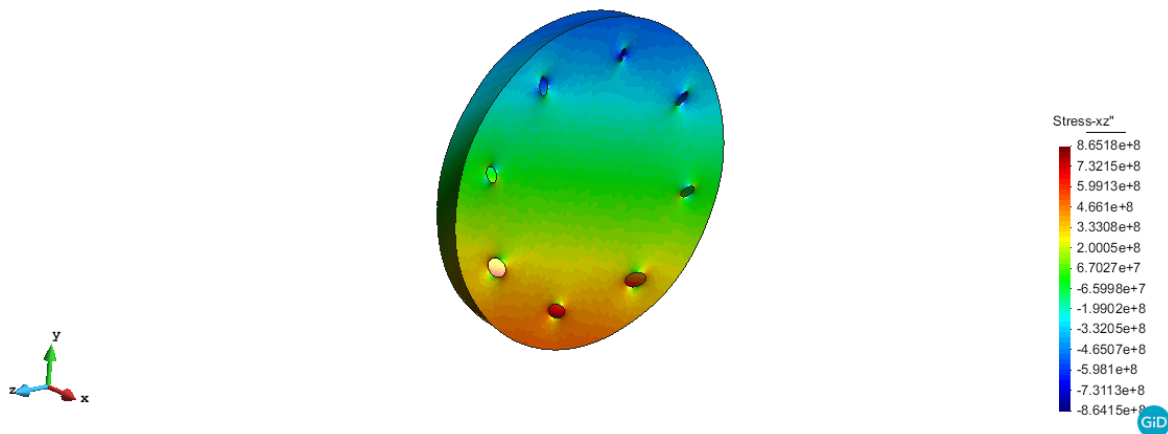
B.1.4.1. Ensayo axial



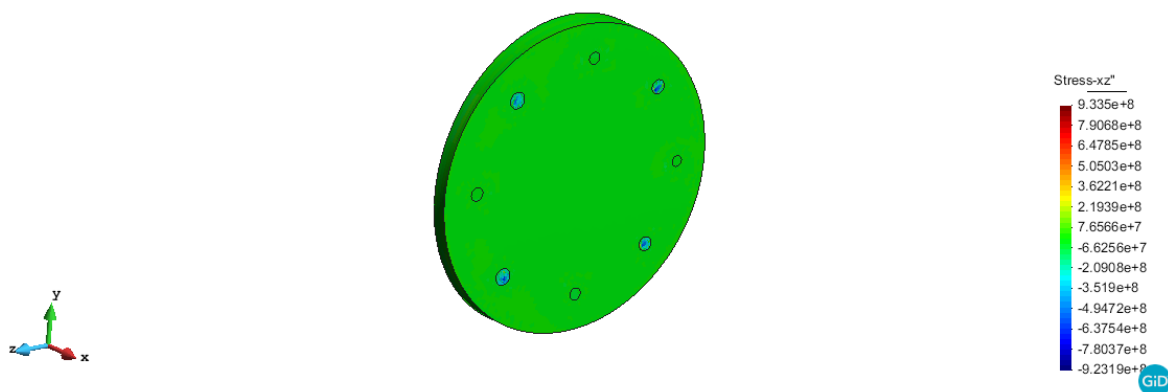
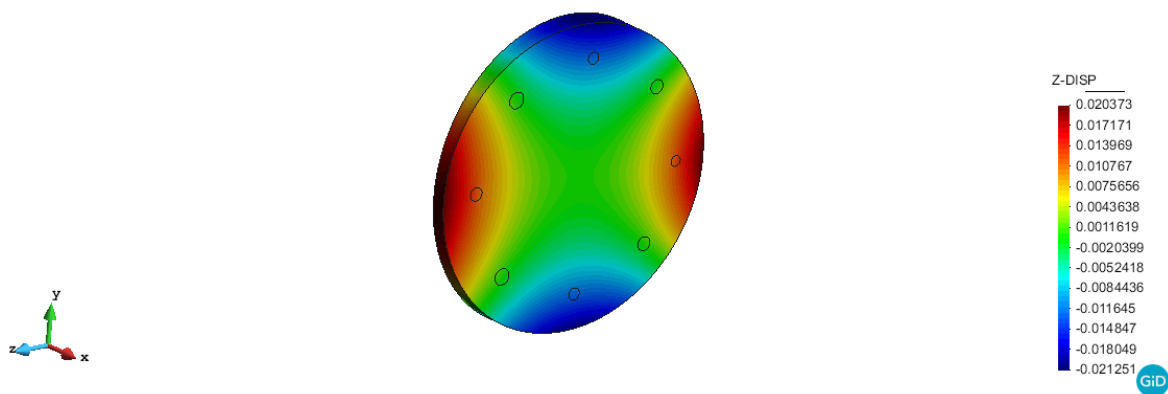


B.1.4.2. Ensayo de torsión

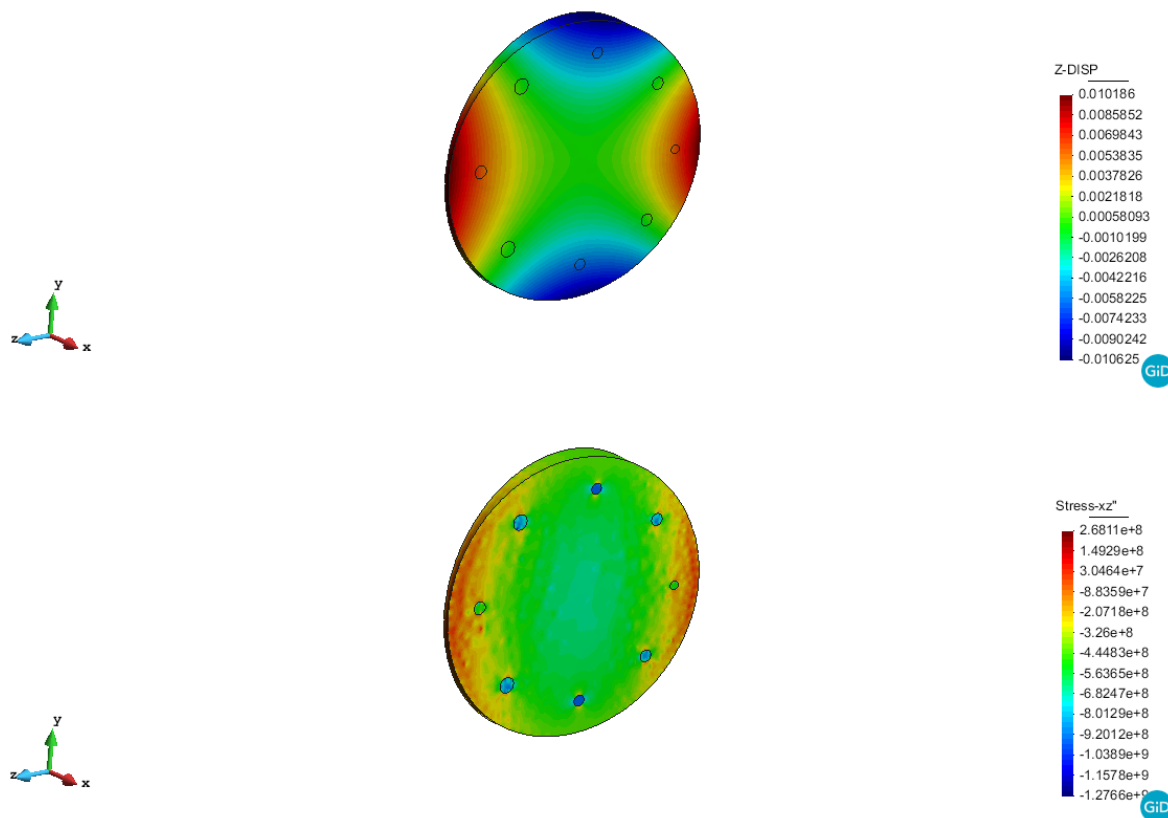




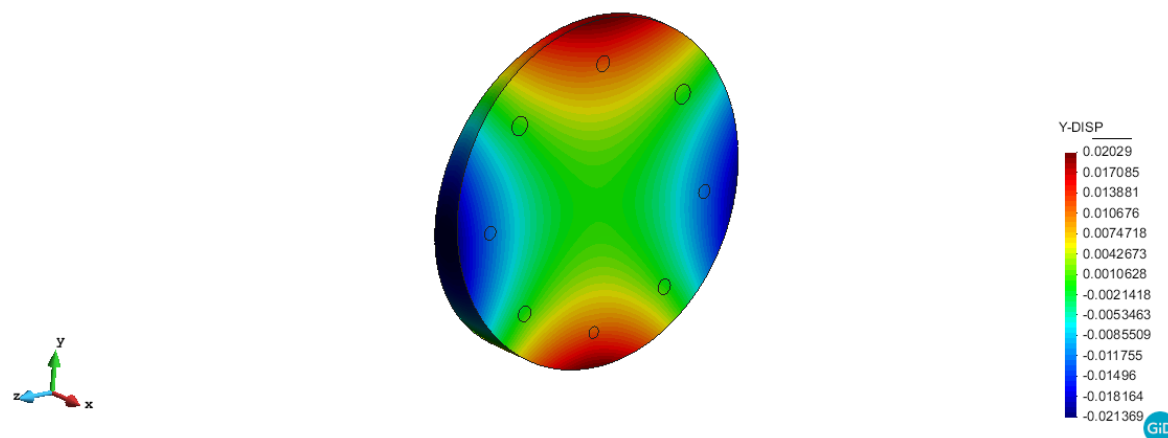
B.1.4.3. Ensayo de flexión pura en el eje Y

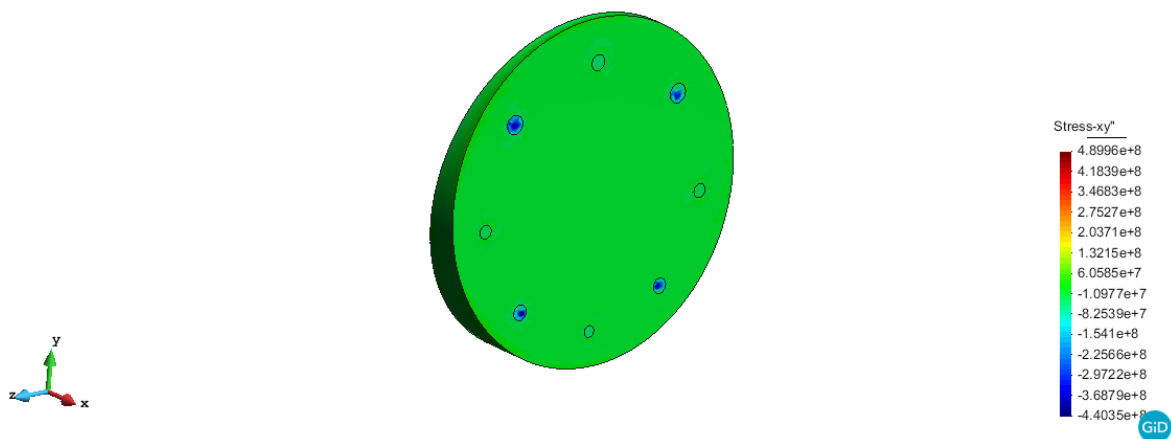


B.1.4.4. Ensayo de flexión simple en el eje Y

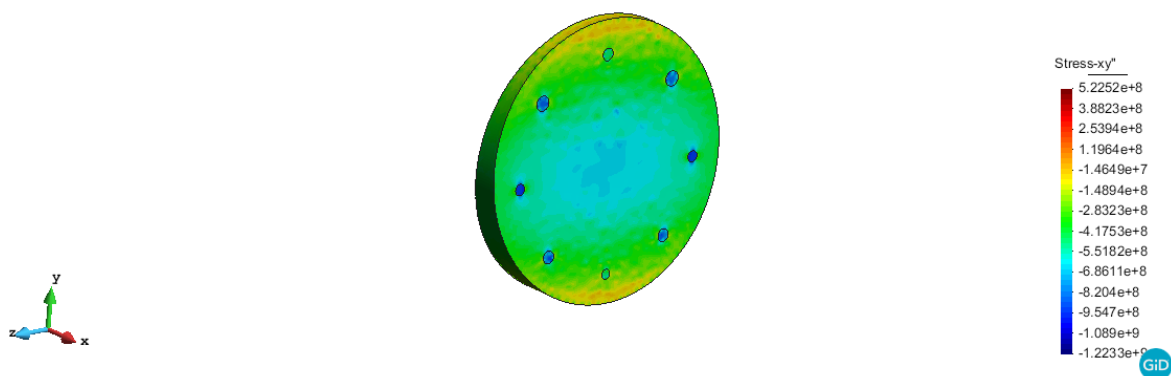
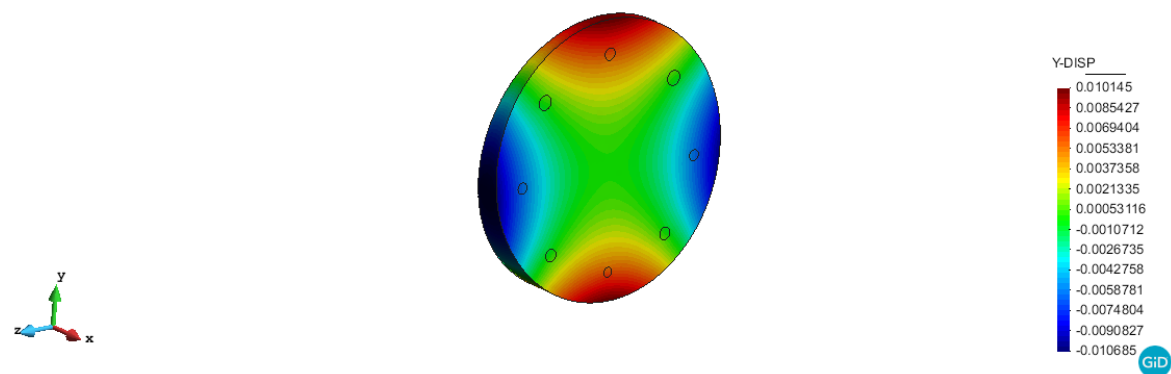


B.1.4.5. Ensayo de flexión pura en el eje Z



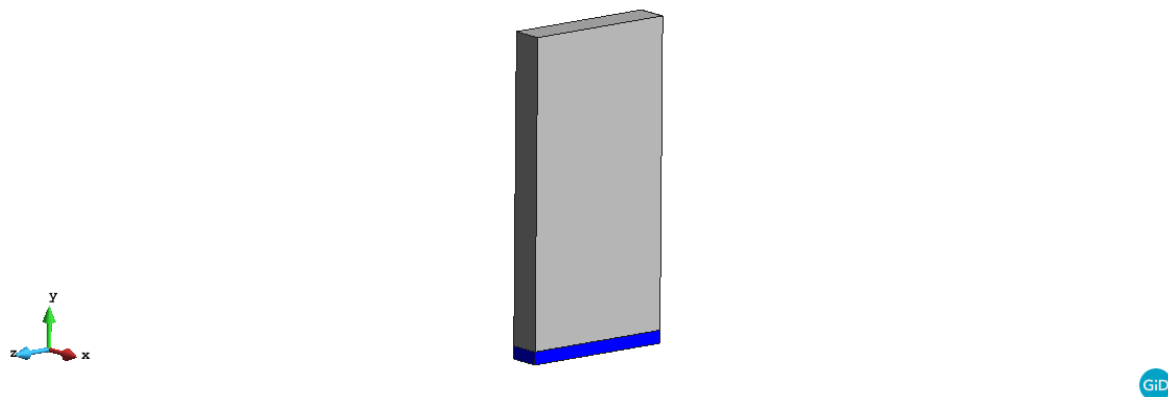


B.1.4.6. Ensayo de flexión simple en el eje Z

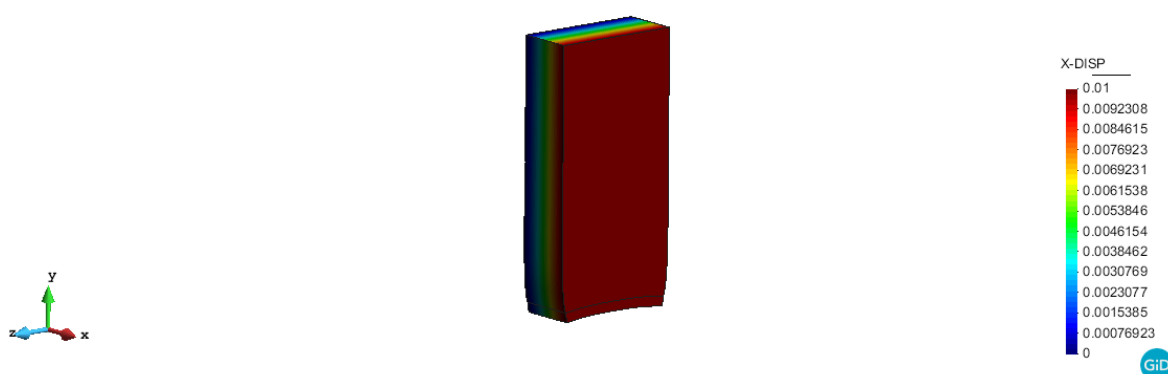
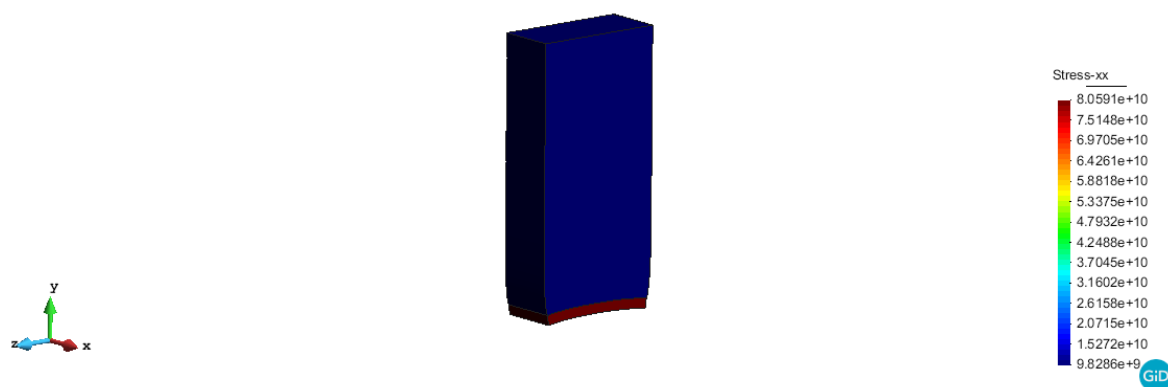


B.2. Viga sometida a flexión compuesta recta

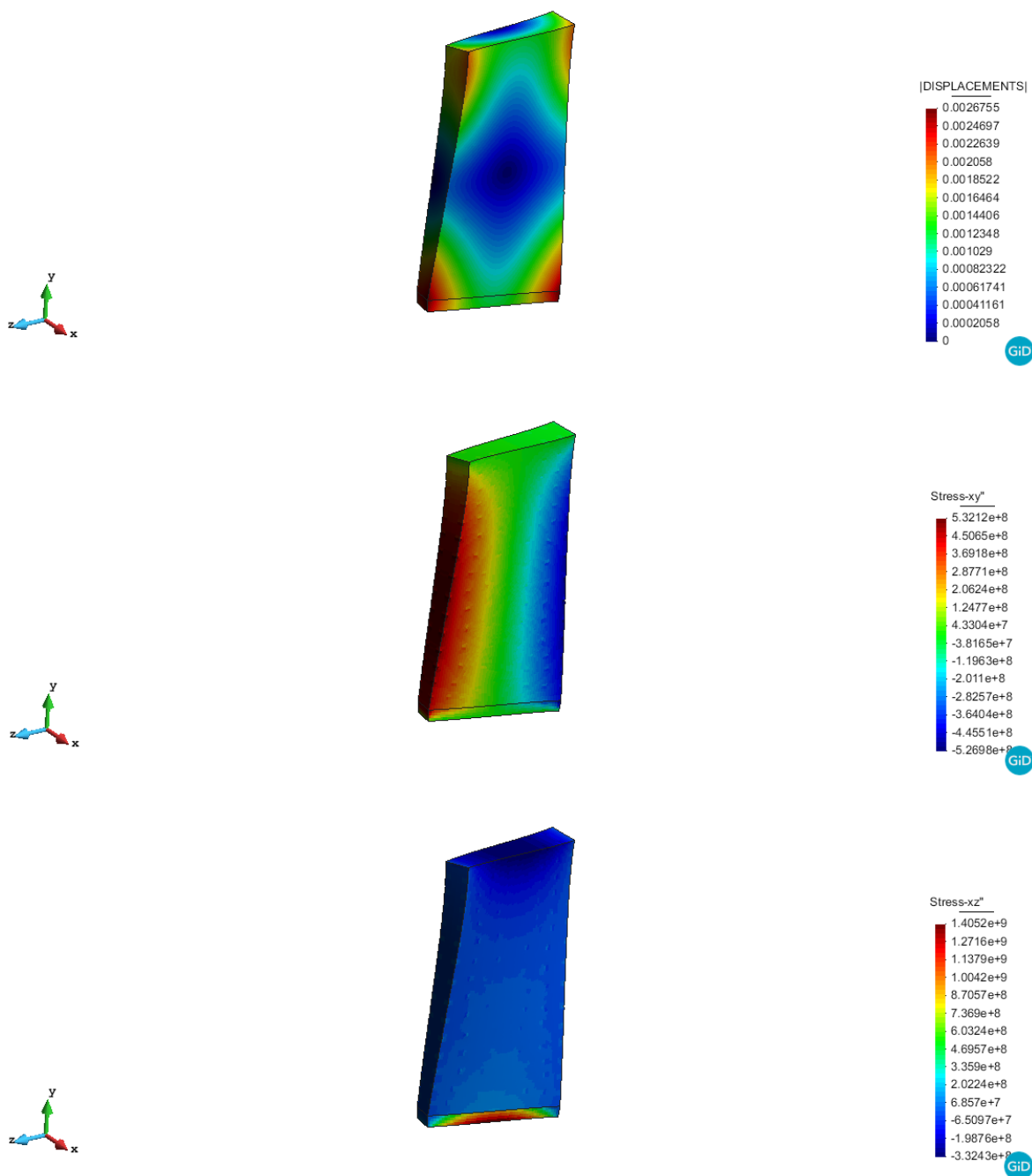
B.2.1. Perfil rectangular con refuerzo de acero



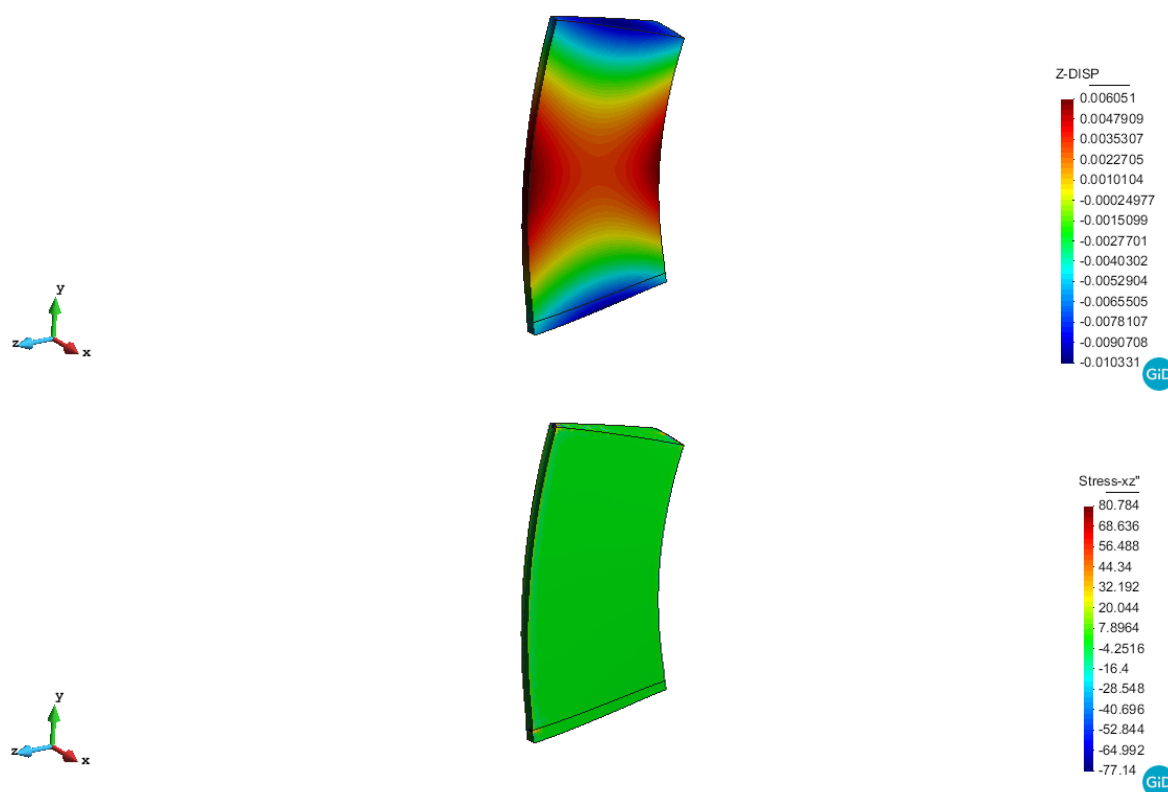
B.2.1.1. Ensayo axial



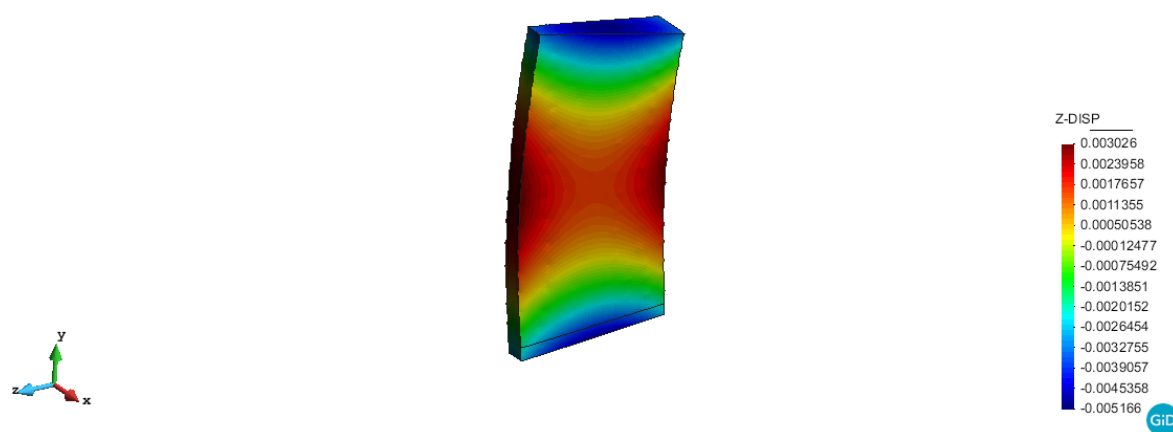
B.2.1.2. Ensayo de torsión

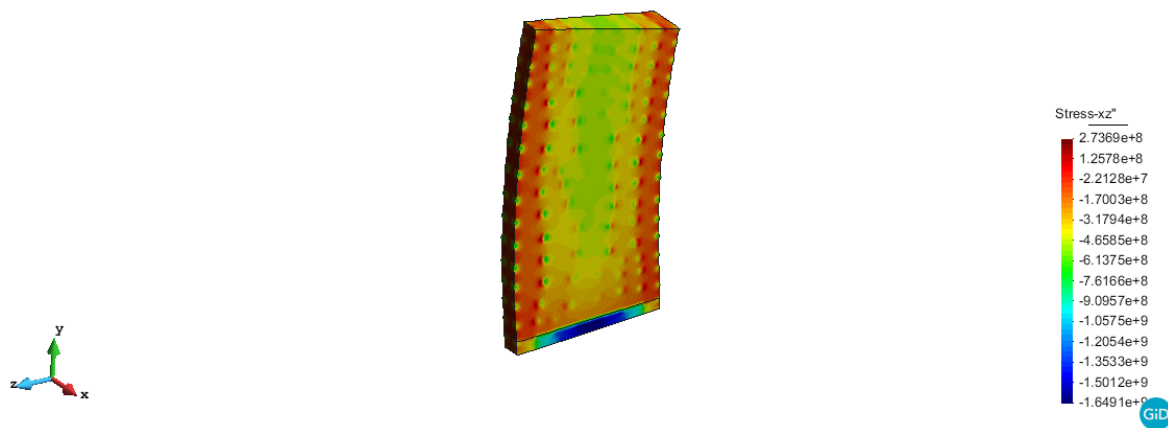


B.2.1.3. Ensayo de flexión pura en el eje Y

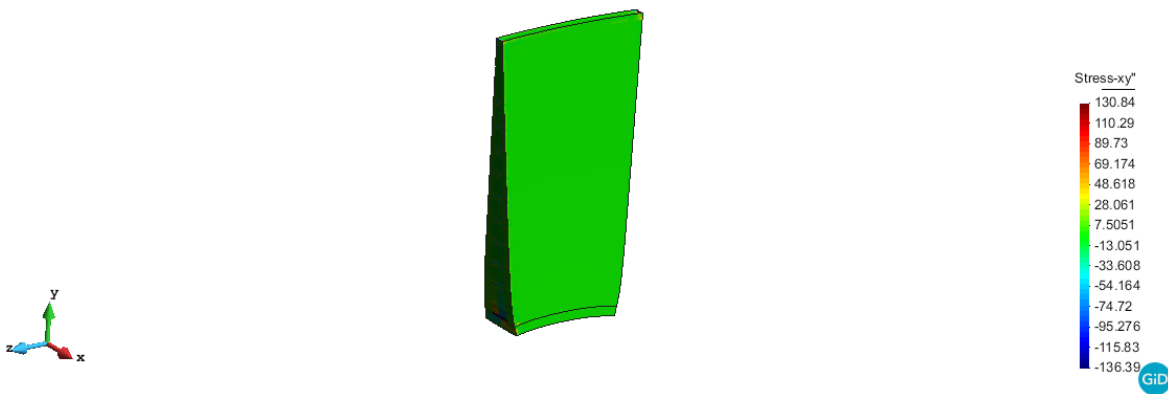
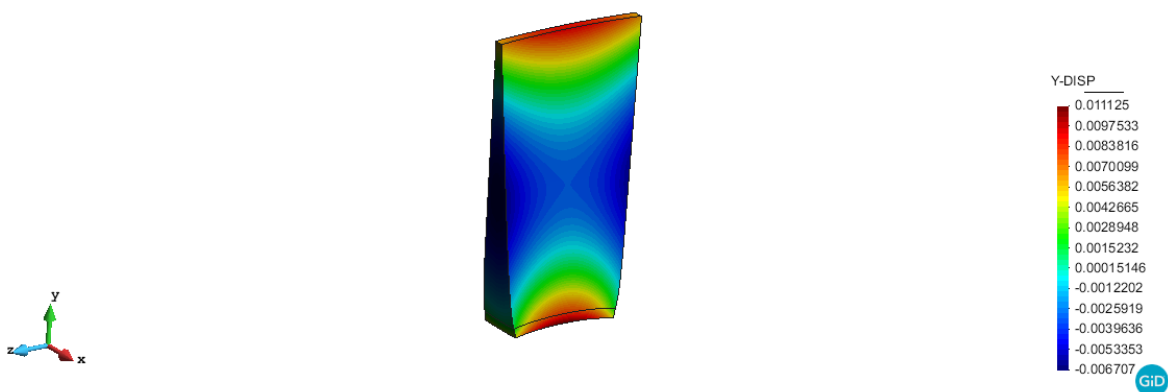


B.2.1.4. Ensayo de flexión simple en el eje Y

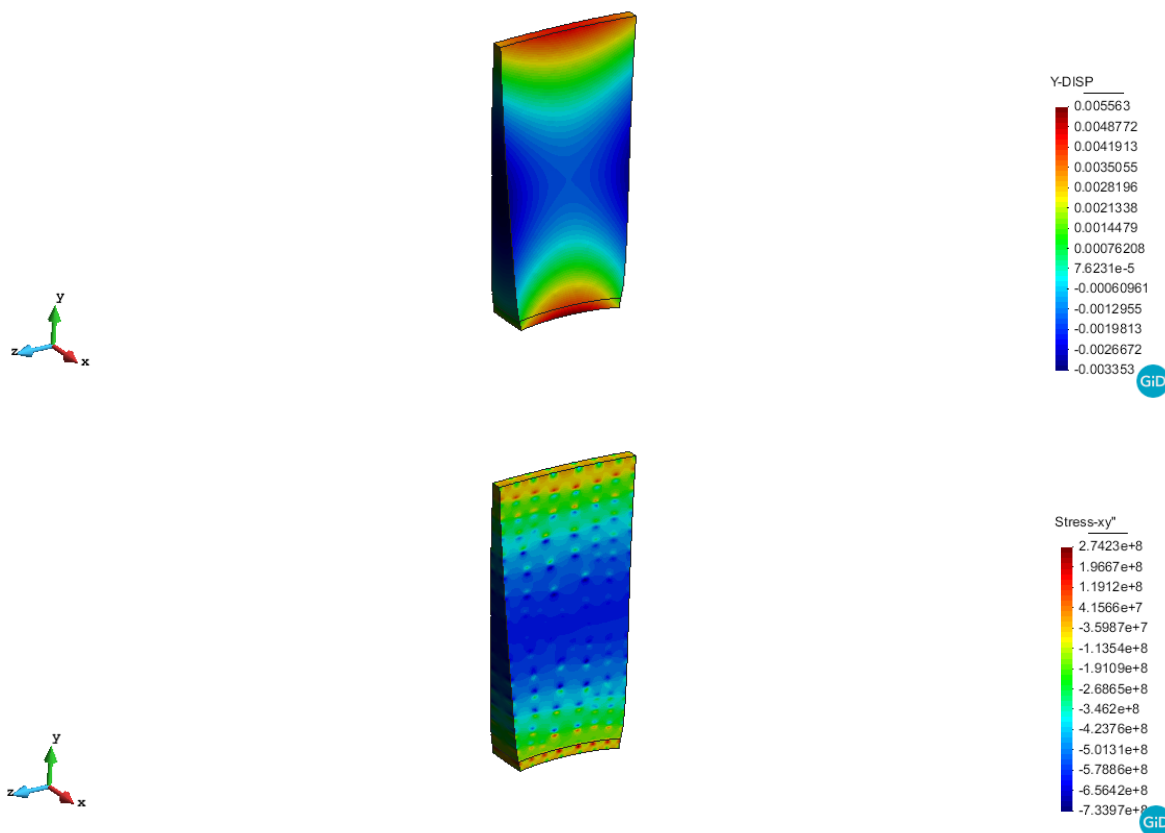




B.2.1.5. Ensayo de flexión pura en el eje Z

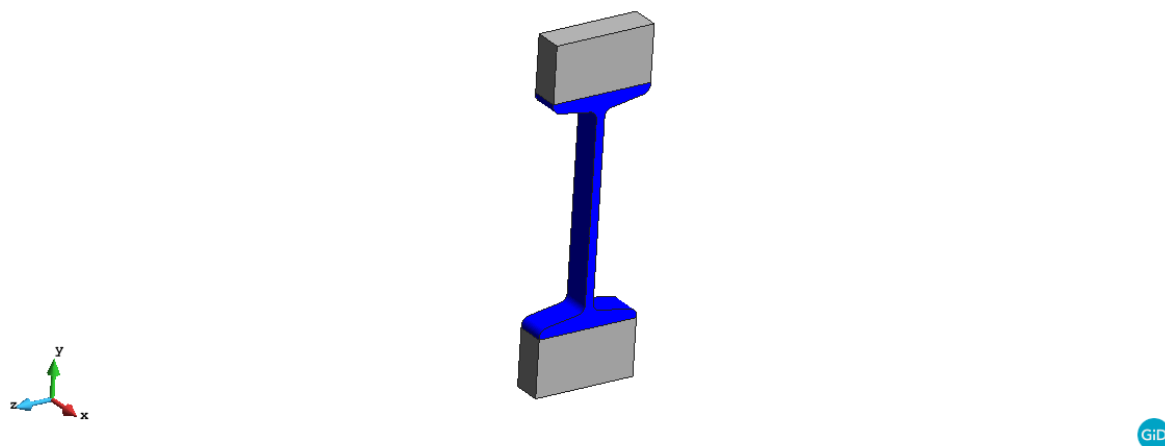


B.2.1.6. Ensayo de flexión simple en el eje Z

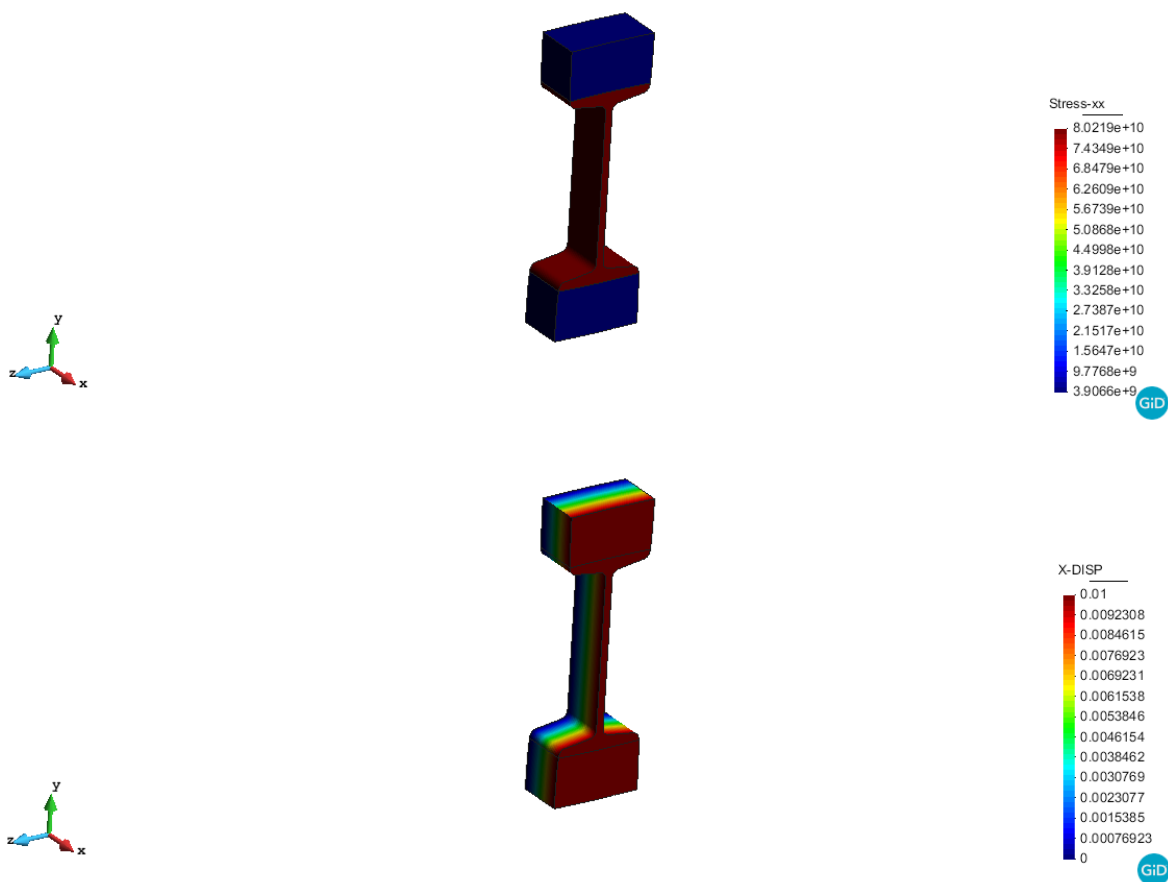


B.3. Viga sometida a flexión simple

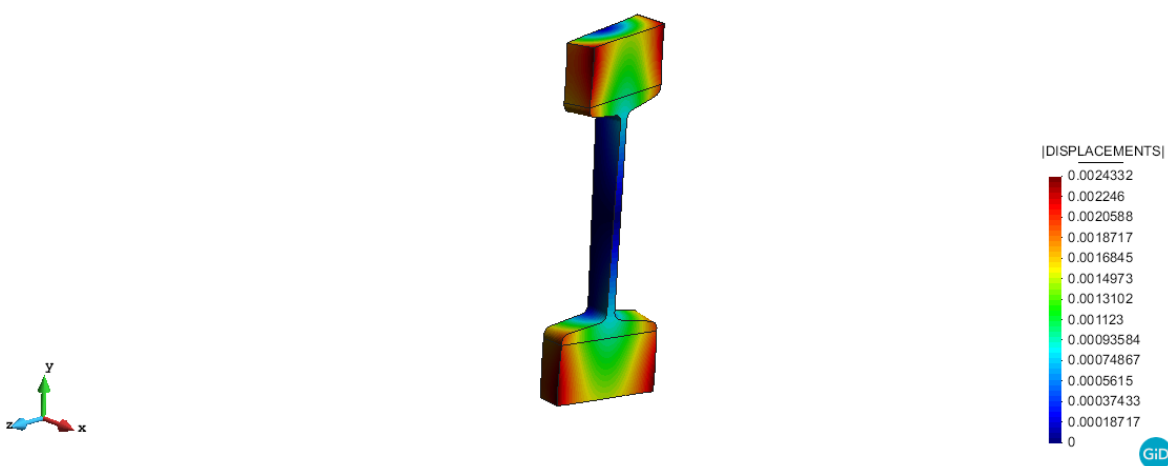
B.3.1. Perfil IPN200 con refuerzos de madera

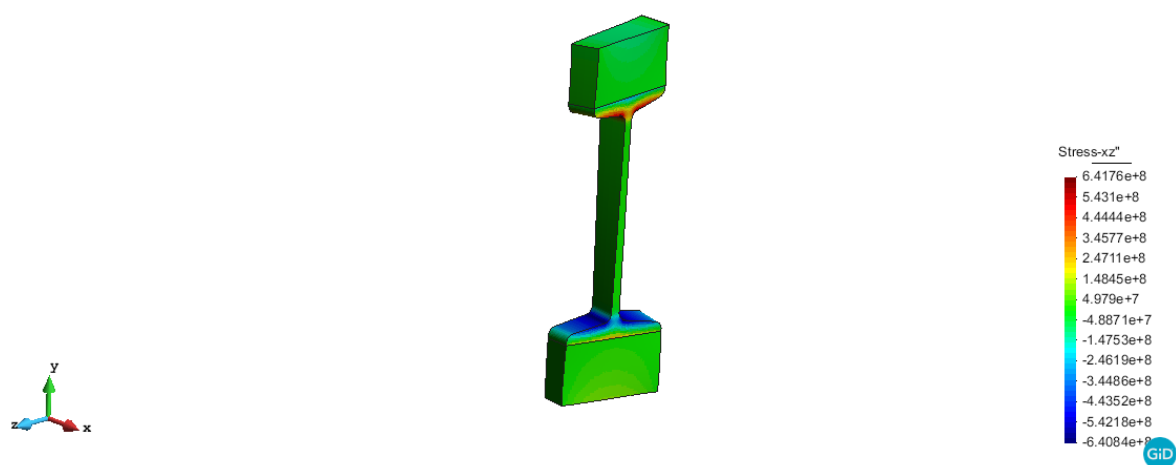
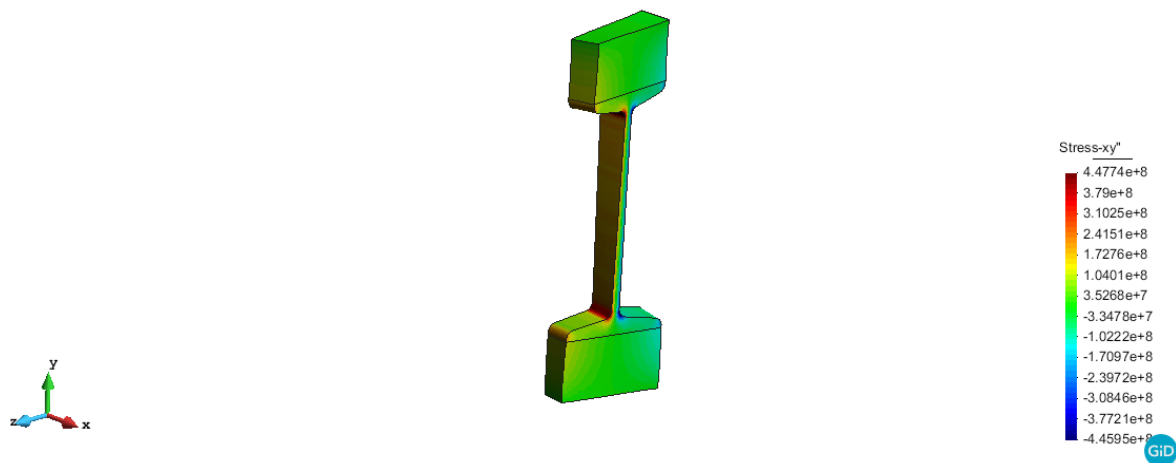


B.3.1.1. Ensayo axial

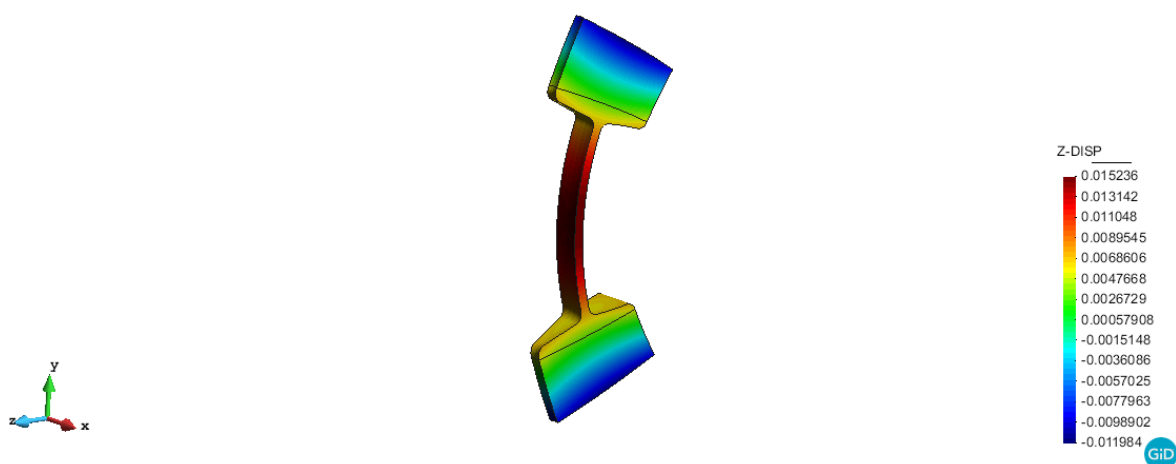


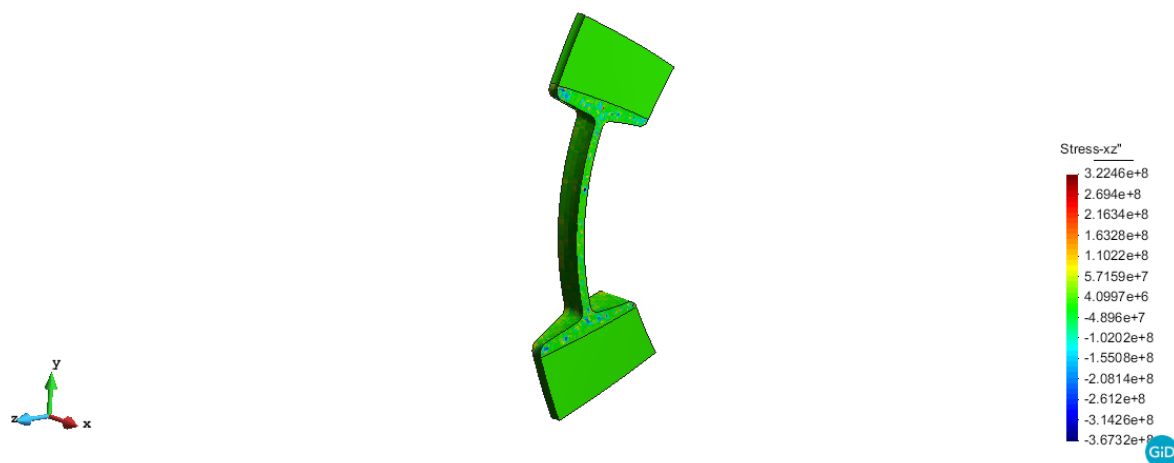
B.3.1.2. Ensayo de torsión



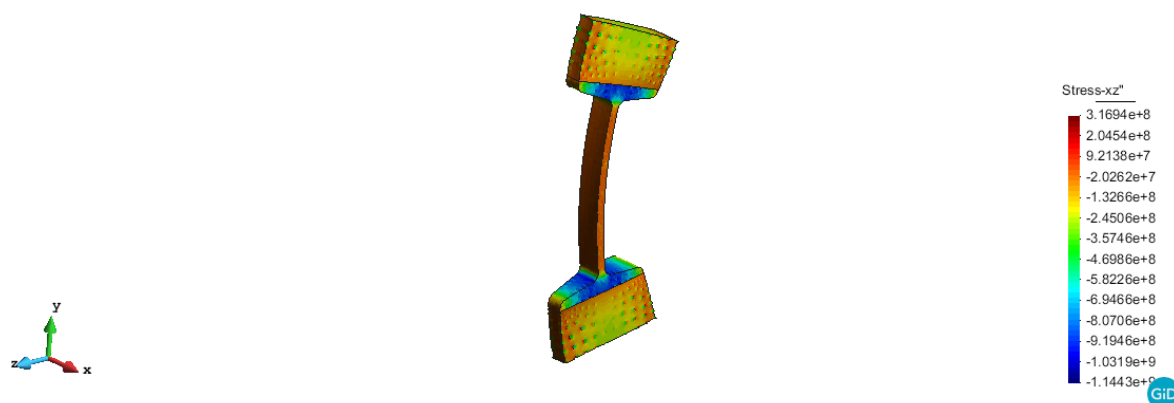
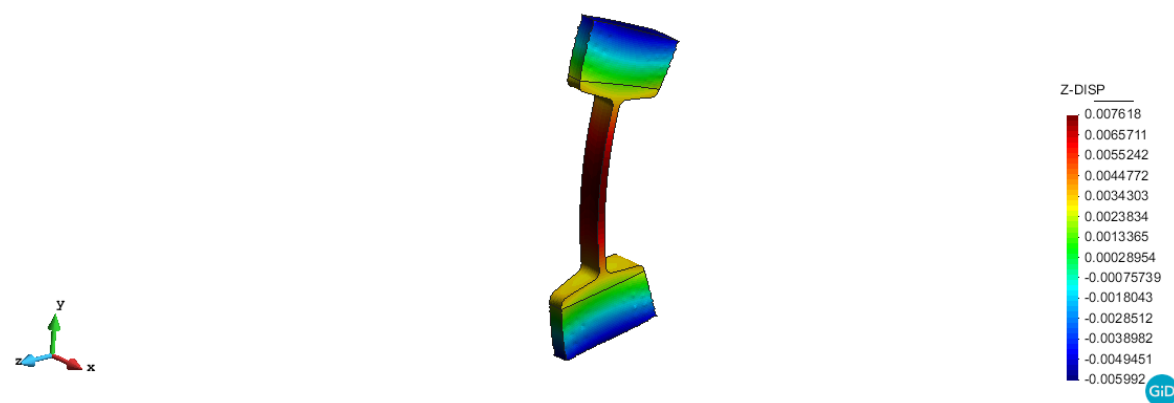


B.3.1.3. Ensayo de flexión pura en el eje Y

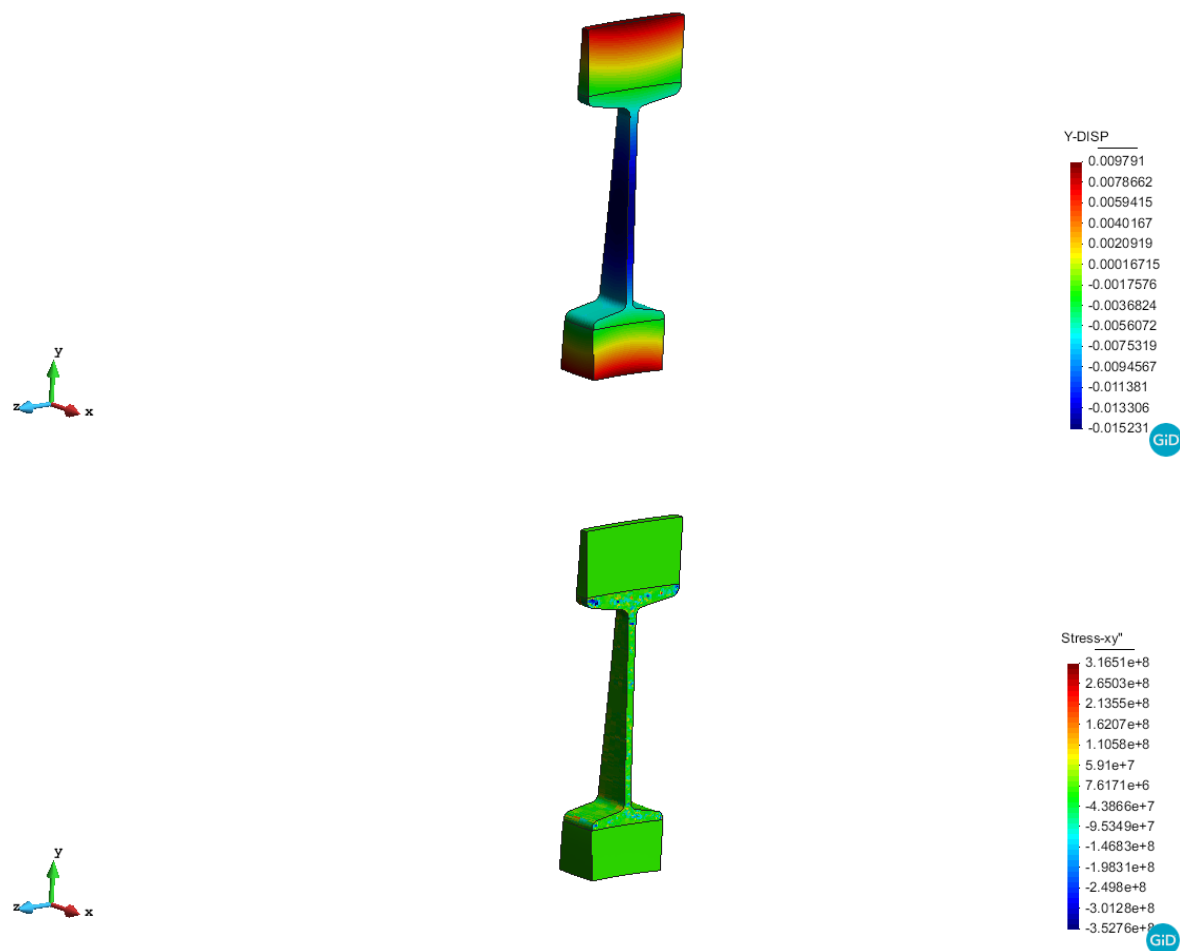




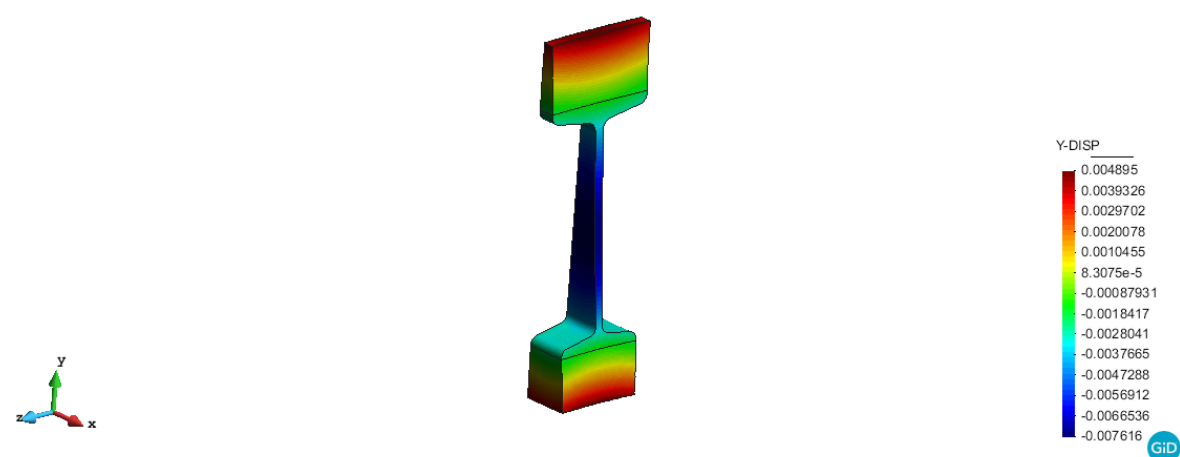
B.3.1.4. Ensayo de flexión simple en el eje Y

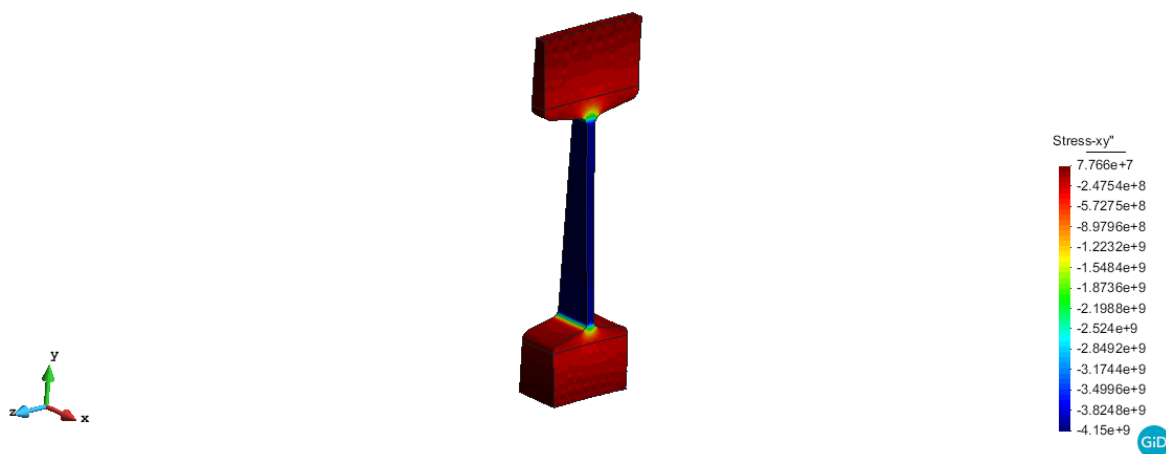


B.3.1.5. Ensayo de flexión pura en el eje Z



B.3.1.6. Ensayo de flexión simple en el eje Z





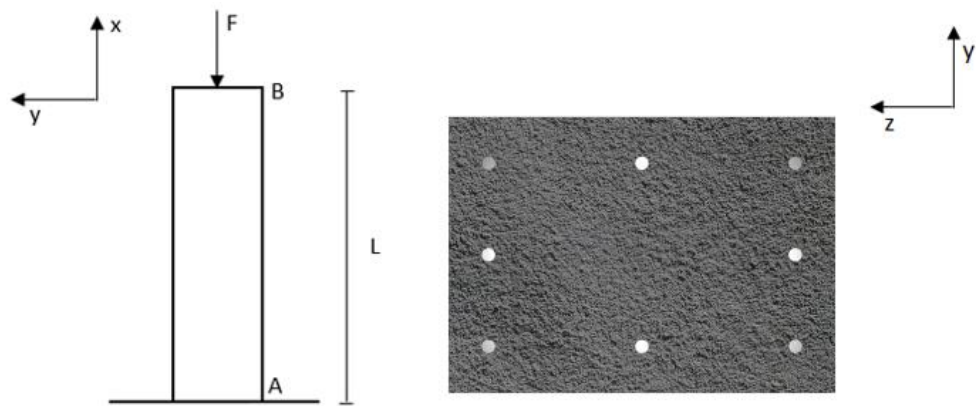
Anexo C. Cálculos Analíticos y de Reducción Dimensional

En el presente anexo se muestra el procedimiento y los resultados del cálculo analítico. También los obtenidos mediante reducción dimensional y visualizados a través del post-proceso del programa GiD.

C.1. Cálculo analítico

C.1.1. Columnas de hormigón armado sometidas a compresión

C.1.1.1. Perfil rectangular de 350x250 mm



Datos del problema

$$L = 3 \text{ m}$$

$$b = 250 \text{ mm}$$

$$P = 100 \text{ kN}$$

$$E_h = 25 \text{ GPa}$$

$$d = 12 \text{ mm}$$

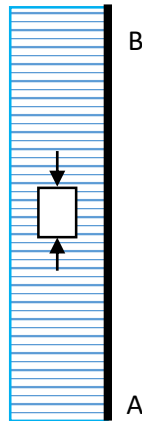
$$E_a = 200 \text{ GPa}$$

$$a = 350 \text{ mm}$$

Cálculo de reacciones

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow N - F = 0 \rightarrow N = F = 10^6 \text{ N}$$

Diagrama del esfuerzo axial



Características mecánicas de la sección

$$n_i = \frac{E_i}{\bar{E}} = \frac{E_a}{E_h} = \frac{200 \text{ GPa}}{25 \text{ GPa}} = 8$$

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A_h + n_a A_a = \left[(350 \text{ mm}) \cdot (250 \text{ mm}) - 8 \cdot \pi \cdot \frac{(12 \text{ mm})^2}{4} \right] + \left[8 \cdot \left(8 \cdot \pi \cdot \frac{(12 \text{ mm})^2}{4} \right) \right] \\ &= (350 \text{ mm}) \cdot (250 \text{ mm}) + 7 \cdot \left(8 \cdot \pi \cdot \frac{(12 \text{ mm})^2}{4} \right) = 93833.451 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

Tensiones en el acero y el hormigón

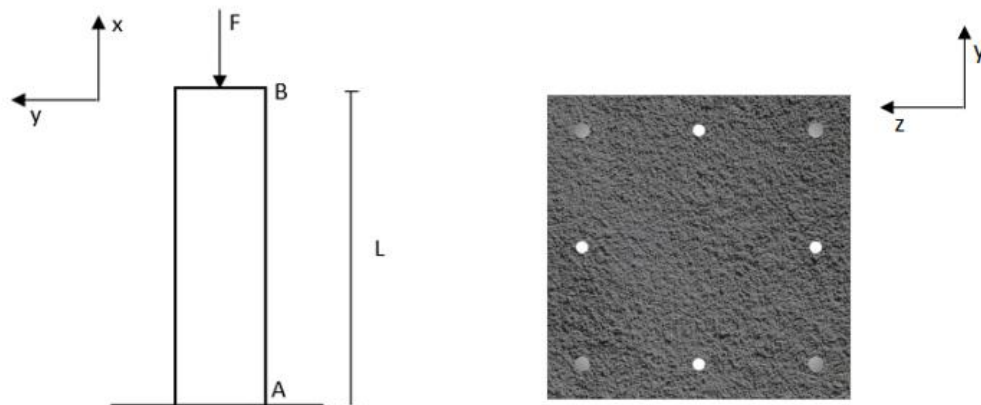
$$\sigma_h = \frac{P}{\bar{A}} = \frac{-10^6 \text{ N}}{93833.451 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = -10.657 \text{ MPa}$$

$$\sigma_a = n_a \frac{P}{\bar{A}} = 8 \cdot \frac{-10^6 \text{ N}}{93833.451 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = -85.257 \text{ MPa}$$

Flecha

$$\Delta l = \frac{N L}{\bar{E} \bar{A}} = \frac{-10^6 \text{ N} \cdot 3 \text{ m}}{25 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 93833.451 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = -1.279 \text{ mm}$$

C.1.1.2. Perfil rectangular de 400x400 mm



Datos del problema

$$L = 3 \text{ m}$$

$$a = 400 \text{ mm}$$

$$P = 100 \text{ kN}$$

$$E_h = 25 \text{ GPa}$$

$$d_1 = 16 \text{ mm}$$

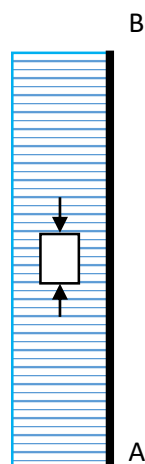
$$E_a = 200 \text{ GPa}$$

$$d_2 = 20 \text{ mm}$$

Cálculo de reacciones

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow N - F = 0 \rightarrow N = F = 10^6 \text{ N}$$

Diagrama del esfuerzo axial



Características mecánicas de la sección

$$n_i = \frac{E_i}{\bar{E}} = \frac{E_a}{E_h} = \frac{200 \text{ GPa}}{25 \text{ GPa}} = 8$$

$$\begin{aligned}\bar{A} &= A_h + n_a A_a = \left[(400 \text{ mm})^2 - 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{(16 \text{ mm})^2}{4} + \frac{(20 \text{ mm})^2}{4} \right) \right] \\ &\quad + \left[8 \cdot \left(4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{(16 \text{ mm})^2}{4} + \frac{(20 \text{ mm})^2}{4} \right) \right) \right] \\ &= (400 \text{ mm})^2 + 7 \cdot \left(4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{(16 \text{ mm})^2}{4} + \frac{(20 \text{ mm})^2}{4} \right) \right) = 174426.193 \text{ mm}^2\end{aligned}$$

Tensiones en el acero y el hormigón

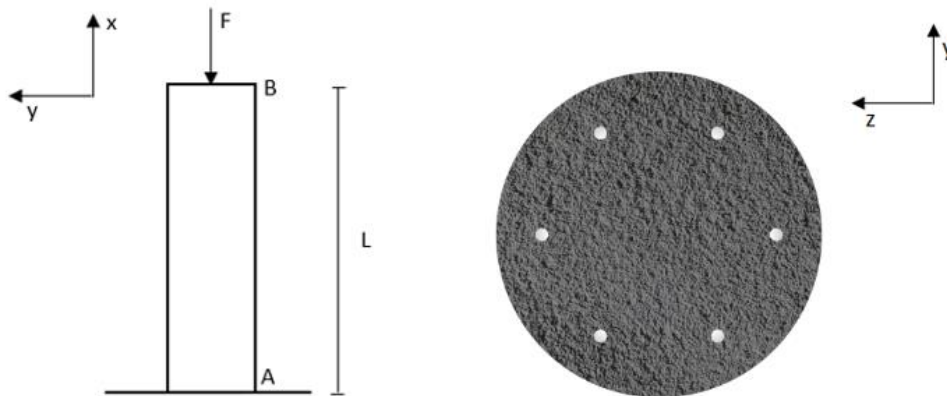
$$\sigma_h = \frac{P}{\bar{A}} = \frac{-10^6 \text{ N}}{174426.193 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = -5.733 \text{ MPa}$$

$$\sigma_a = n_a \frac{P}{\bar{A}} = 8 \cdot \frac{-10^6 \text{ N}}{174426.193 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = -45.864 \text{ MPa}$$

Flecha

$$\Delta l = \frac{N L}{\bar{E} \bar{A}} = \frac{-10^6 \text{ N} \cdot 3 \text{ m}}{25 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 174426.193 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = -0.688 \text{ mm}$$

C.1.1.3. Perfil circular de diámetro 300 mm



Datos del problema

$$L = 3 \text{ m}$$

$$D = 300 \text{ mm}$$

$$P = 100 \text{ kN}$$

$$E_h = 25 \text{ GPa}$$

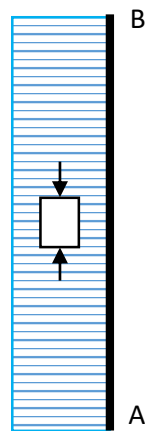
$$d = 12 \text{ mm}$$

$$E_a = 200 \text{ GPa}$$

Cálculo de reacciones

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow N - F = 0 \rightarrow N = F = 10^6 \text{ N}$$

Diagrama del esfuerzo axial



Características mecánicas de la sección

$$n_i = \frac{E_i}{E} = \frac{E_a}{E_h} = \frac{200 \text{ GPa}}{25 \text{ GPa}} = 8$$

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A_h + n_a A_a = \left[\pi \cdot \frac{(300 \text{ mm})^2}{4} - 6 \cdot \pi \cdot \frac{(12 \text{ mm})^2}{4} \right] + \left[8 \cdot \left(6 \cdot \pi \cdot \frac{(12 \text{ mm})^2}{4} \right) \right] \\ &= \pi \cdot \frac{(300 \text{ mm})^2}{4} + 7 \cdot \left(6 \cdot \pi \cdot \frac{(12 \text{ mm})^2}{4} \right) = 75435.923 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

Tensiones en el acero y el hormigón

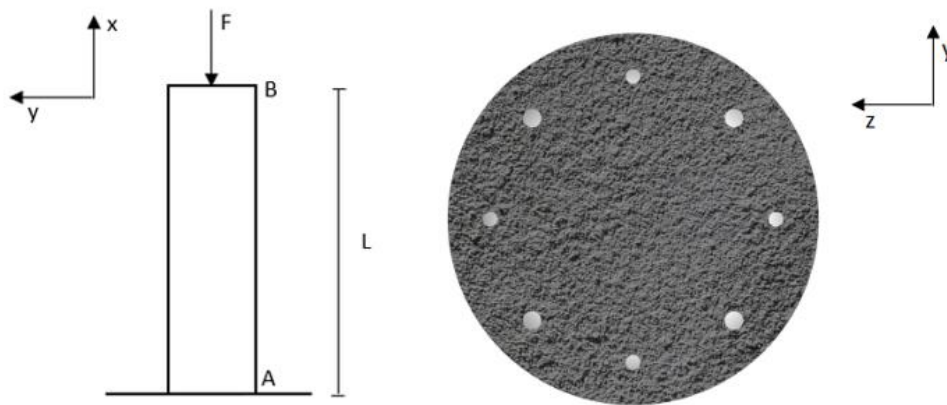
$$\sigma_h = \frac{P}{A} = \frac{-10^6 \text{ N}}{75435.923 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = -13.256 \text{ MPa}$$

$$\sigma_a = n_a \frac{P}{A} = 8 \cdot \frac{-10^6 \text{ N}}{75435.923 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = -106.050 \text{ MPa}$$

Flecha

$$\Delta l = \frac{N L}{E A} = \frac{-10^6 \text{ N} \cdot 3 \text{ m}}{25 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 75435.923 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = -1.591 \text{ mm}$$

C.1.1.4. Perfil circular de diámetro 400 mm



Datos del problema

$$L = 3 \text{ m}$$

$$D = 400 \text{ mm}$$

$$P = 100 \text{ kN}$$

$$E_h = 25 \text{ GPa}$$

$$d_1 = 16 \text{ mm}$$

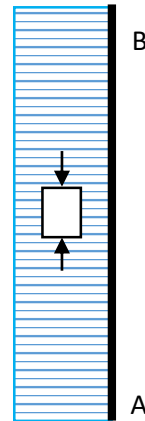
$$E_a = 200 \text{ GPa}$$

$$d_2 = 20 \text{ mm}$$

Cálculo de reacciones

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow N - F = 0 \rightarrow N = F = 10^6 \text{ N}$$

Diagrama del esfuerzo axial



Características mecánicas de la sección

$$n_i = \frac{E_i}{E} = \frac{E_a}{E_h} = \frac{200 \text{ GPa}}{25 \text{ GPa}} = 8$$

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A_h + n_a A_a = \left[\pi \cdot \frac{(400 \text{ mm})^2}{4} - 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{(16 \text{ mm})^2}{4} + \frac{(20 \text{ mm})^2}{4} \right) \right] \\ &\quad + \left[8 \cdot \left(4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{(16 \text{ mm})^2}{4} + \frac{(20 \text{ mm})^2}{4} \right) \right) \right] \\ &= \pi \cdot \frac{(400 \text{ mm})^2}{4} + 7 \cdot \left(4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{(16 \text{ mm})^2}{4} + \frac{(20 \text{ mm})^2}{4} \right) \right) = 140089.899 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

Tensiones en el acero y el hormigón

$$\sigma_h = \frac{P}{\bar{A}} = \frac{-10^6 \text{ N}}{140089.899 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = -7.138 \text{ MPa}$$

$$\sigma_a = n_a \frac{P}{\bar{A}} = 8 \cdot \frac{-10^6 \text{ N}}{140089.899 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = -57.106 \text{ MPa}$$

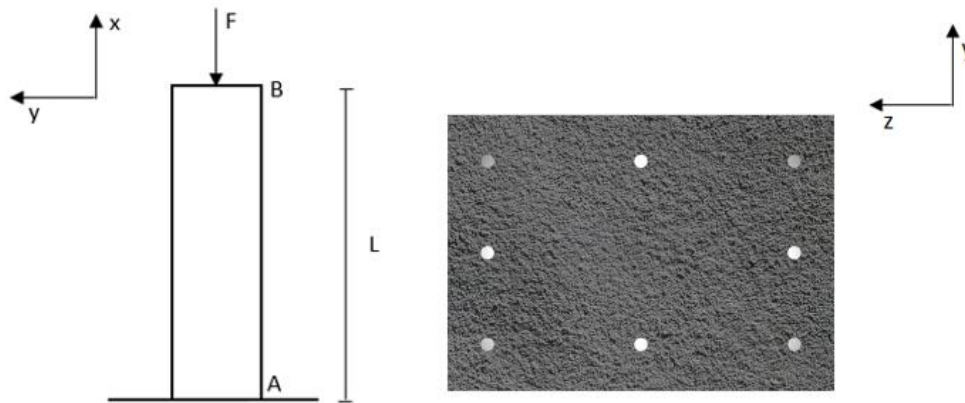
Flecha

$$\Delta l = \frac{N L}{E \bar{A}} = \frac{-10^6 \text{ N} \cdot 3 \text{ m}}{25 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 140089.899 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = -0.856 \text{ mm}$$

C.2. Cálculo mediante Reducción Dimensional

C.2.1. Columnas de hormigón armado sometidas a compresión

C.2.1.1. Perfil rectangular de 350x250 mm



Datos del problema

$$L = 3 \text{ m}$$

$$b = 250 \text{ mm}$$

$$P = 100 \text{ kN}$$

$$E_h = 25 \text{ GPa}$$

$$d = 12 \text{ mm}$$

$$E_a = 200 \text{ GPa}$$

$$a = 350 \text{ mm}$$

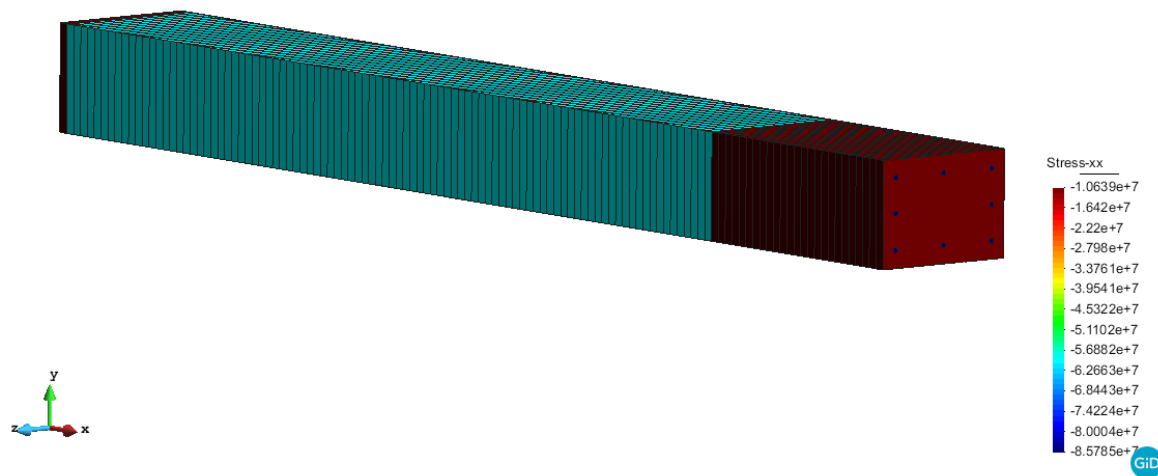
Diagrama del esfuerzo axial



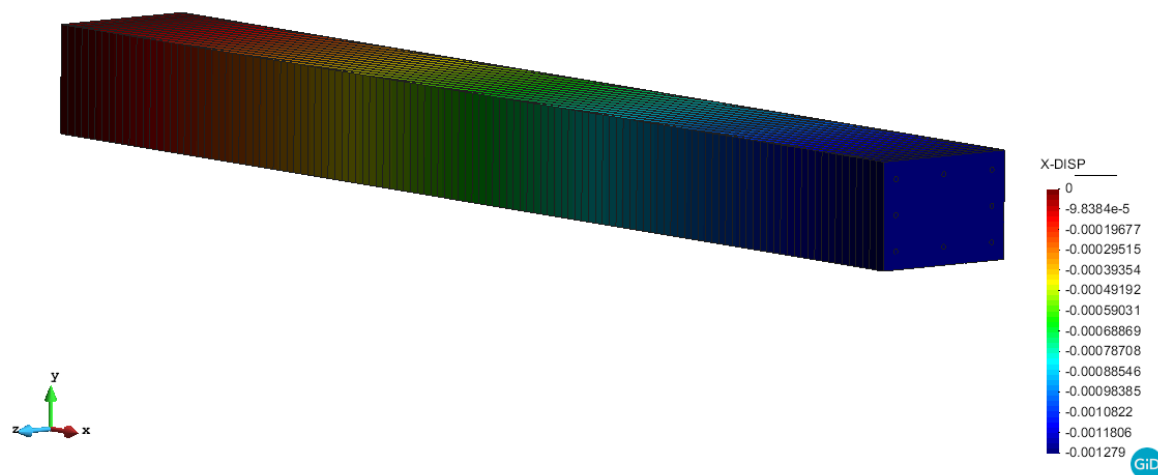
AXIAL_FORCE



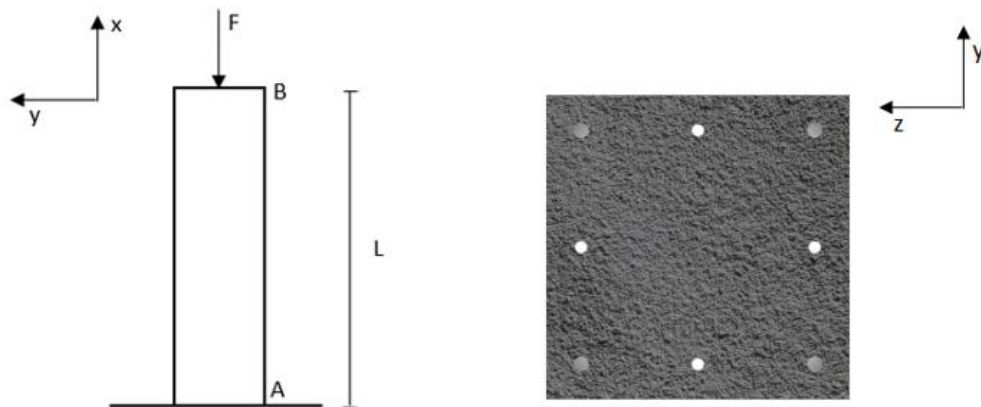
Tensiones en el acero y el hormigón



Flecha



C.2.1.2. Perfil rectangular de 400x400 mm



Datos del problema

$$L = 3 \text{ m}$$

$$a = 400 \text{ mm}$$

$$P = 100 \text{ kN}$$

$$E_h = 25 \text{ GPa}$$

$$d_1 = 16 \text{ mm}$$

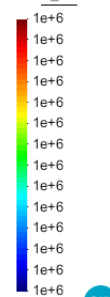
$$E_a = 200 \text{ GPa}$$

$$d_2 = 20 \text{ mm}$$

Diagrama del esfuerzo axial

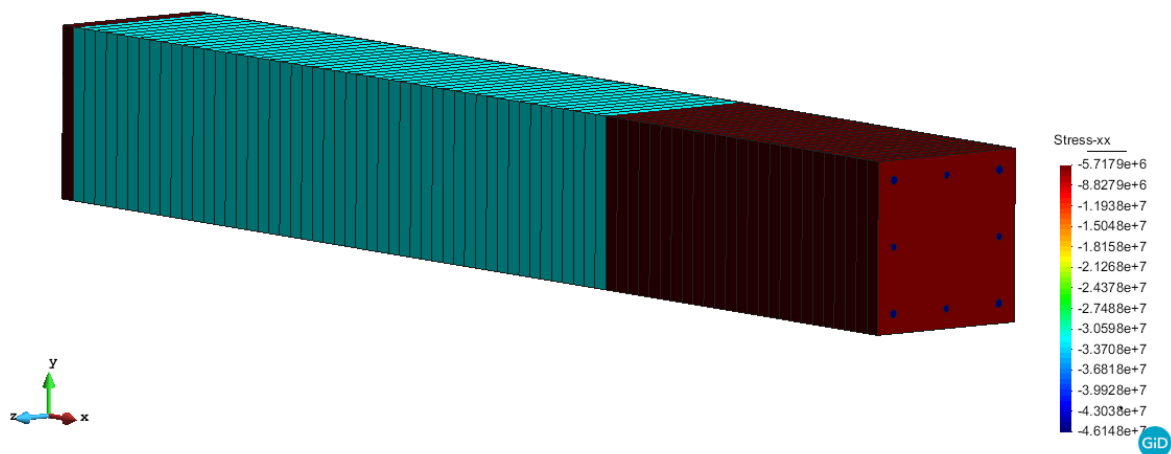


AXIAL_FORCE

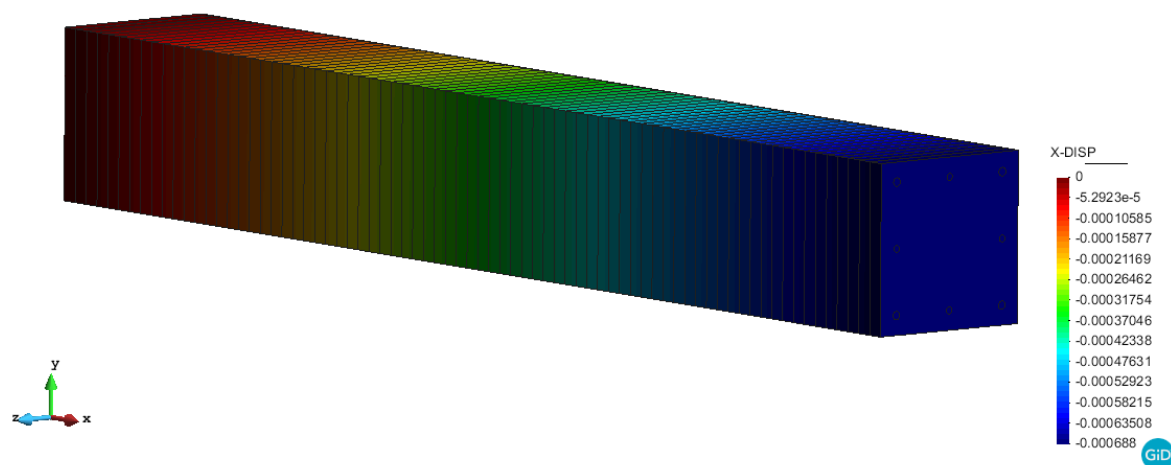


GiD

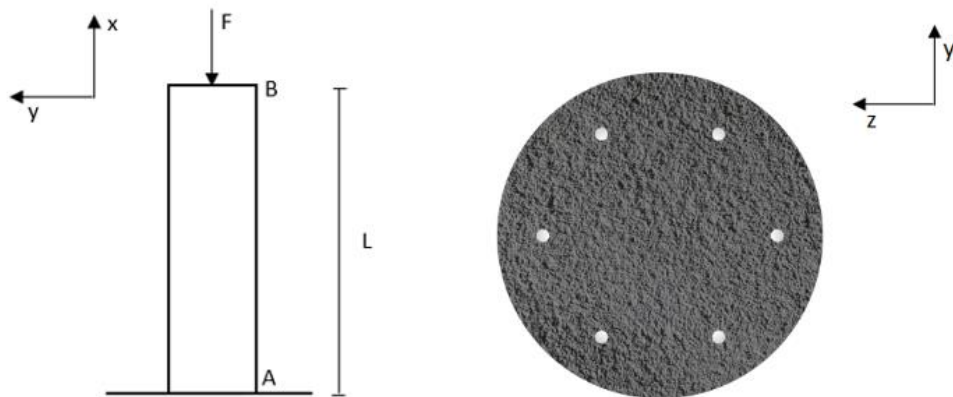
Tensiones en el acero y el hormigón



Flecha



C.2.1.3. Perfil circular de diámetro 300 mm



Datos del problema

$$L = 3 \text{ m}$$

$$D = 300 \text{ mm}$$

$$P = 100 \text{ kN}$$

$$E_h = 25 \text{ GPa}$$

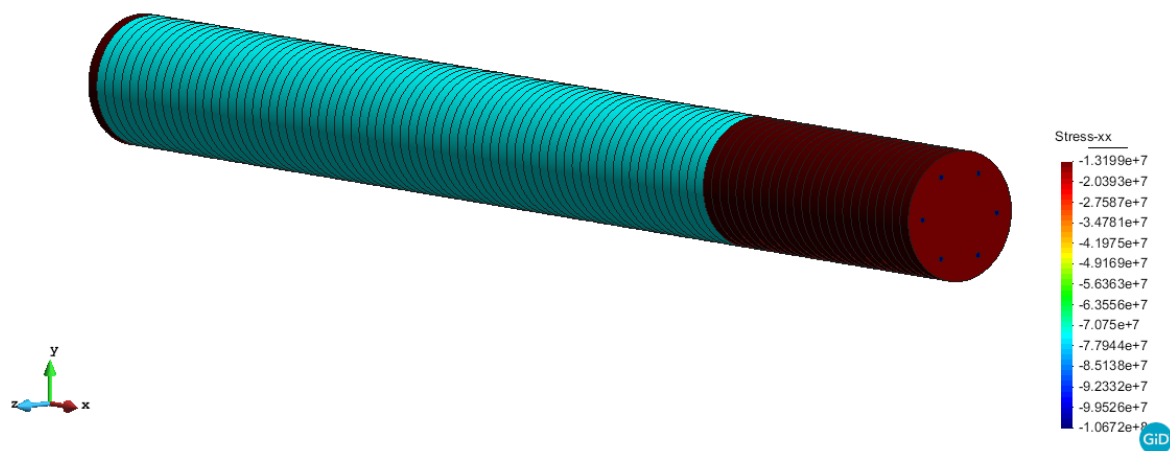
$$d = 12 \text{ mm}$$

$$E_a = 200 \text{ GPa}$$

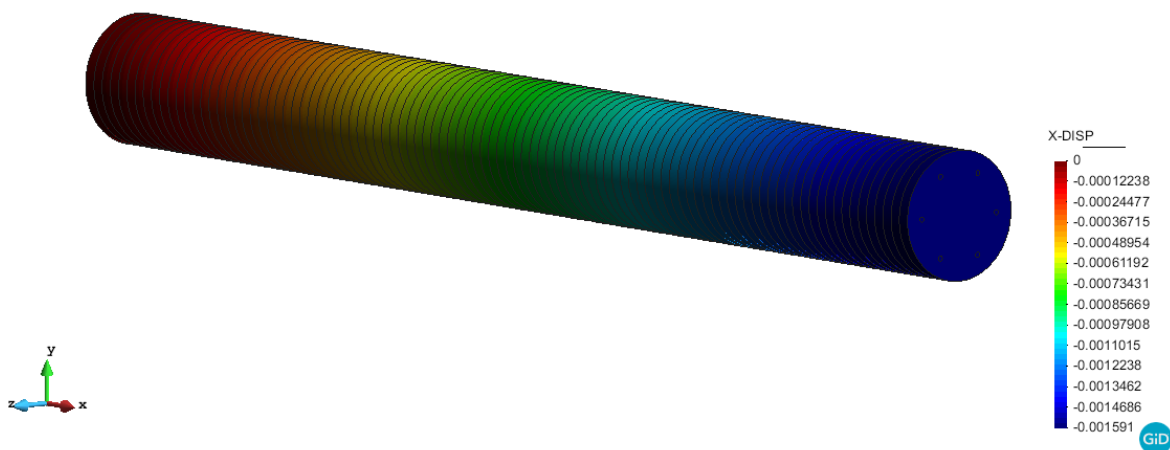
Diagrama del esfuerzo axial



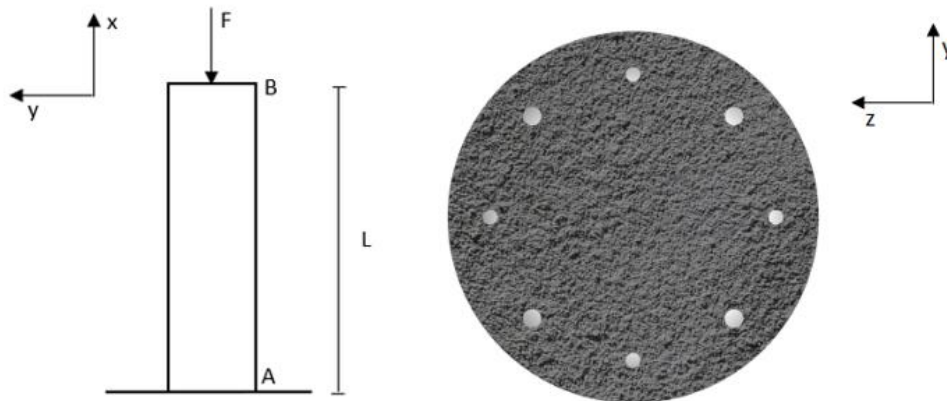
Tensiones en el acero y el hormigón



Flecha



C.2.1.4. Perfil circular de diámetro 400 mm



Datos del problema

$$L = 3 \text{ m}$$

$$D = 400 \text{ mm}$$

$$P = 100 \text{ kN}$$

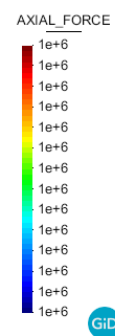
$$E_h = 25 \text{ GPa}$$

$$d_1 = 16 \text{ mm}$$

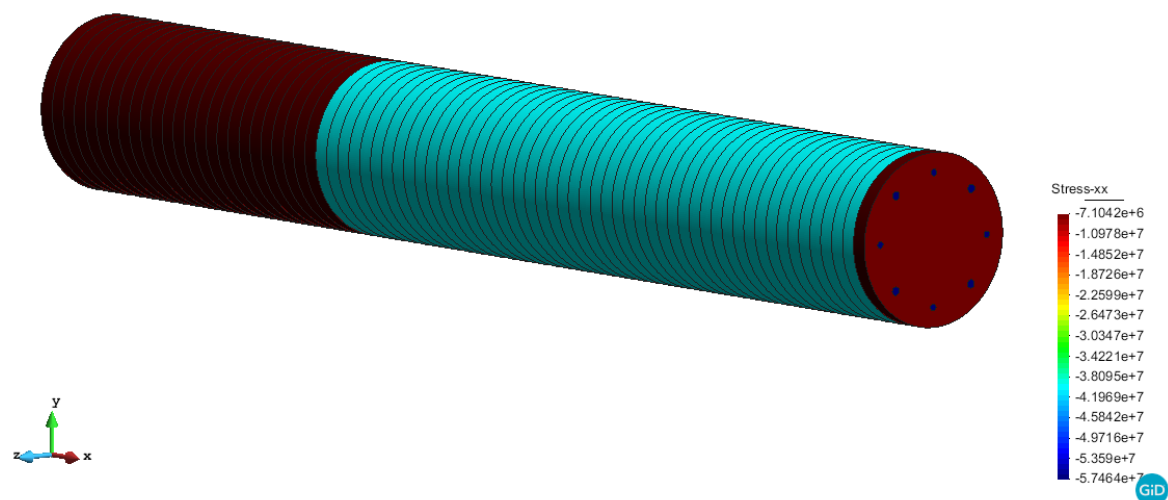
$$E_a = 200 \text{ GPa}$$

$$d_2 = 20 \text{ mm}$$

Diagrama del esfuerzo axial



Tensiones en el acero y el hormigón



Flecha

